Электронный адрес для связи с автором: ereshko@ccas.ru

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

А.Ф. ЕРЕШКО

МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ И ЛОКАЛЬНО – ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2002

УДК 519.865

Ответственный редактор
доктор физ. - мат. наук Г.А.Агасандян

Рассматриваются задачи управления портфелем финансовых инструментов (активов и пассивов финансовых институтов, ценных бумаг) в динамической постановке. Работа состоит из двух частей.

В первой части содержится обзор развитой на Западе методологии для выработки подходов к задаче управления портфелем финансовых инструментов, выбору критериев, генерированию сценариев для случайных величин, выбору алгоритмов решения получающихся задач стохастического динамического управления.

Во второй части работы излагаются оригинальные результаты автора. Сформулирована двухкритериальная задача об управлении портфелем в динамике с целью максимизации ожидаемого дохода в конце процесса от вложенного капитала в начале и минимизации критерия допустимых потерь. Динамика портфеля записывается в переменных – количествах ценных бумаг в портфеле. Основные результаты относятся к динамической задаче при наличии неопределенных факторов в виде марковского процесса. В такой постановке для решения задачи по выбору одной из паретовских точек в пространстве двух критериев применим формализм динамического программирования. Удается установить принцип линейного разложения оптимального результата текущей оптимальной оценки конечного результата и как следствие установить оптимальность простых стратегий для задачи максимизации математического ожидания конечного результата. Предложены вычислительные процедуры прогонки, которые основываются на декомпозиции исходной задачи на случайный процесс и детерминированный.

Рецензенты: В.А. Ириков,
В.В. Дикусар

Научное издание

Введение

Проблема управления портфелем ценных бумаг, активов и пассивов, финансовых инструментов является фундаментальной в финансовой теории и практике. По этой причине к ней было привлечено большое внимание в RAND Corporation, которая специализировалась на стратегических исследованиях Западных экономик [1]. В то же время эта проблема как задача управления в условиях неопределенности также относится и к фундаментальным проблемам в теории принятия решений [2, 3].

Исследования в этой области проводились такими крупными ученым как Р. Беллман, Дж. Данциг, Р. Мертон. Ученик Дж. Данцига – Г. Марковиц – исторически первым сформулировал задачу управления портфелем в статическом случае как задачу исследования операций и теории игр, основываясь на описании неопределенности как случайного процесса и рассмотрев двухкритериальную задачу с критериями математического ожидания и дисперсии [4].

И для финансовой теории и для теории принятия решений базовой является ссылка авторов работ [5 – 10] на публикацию [4].

Первые публикации Г. Марковица вызвали большой поток работ как в финансовой литературе, так и в литературе по теории исследования операций (см. рис. 1).

Исследования финансистов – экономистов были направлены на изучение различных содержательных интерпретаций и обобщений. Так, в статическом случае были получены принципиальные результаты, имевшие широкое практическое применение, например установлено свойство разложения оптимального портфеля на безрисковую и рисковую составляющие для важного частного случая наличия на рынке безрискового актива, исследованы фундаментальные свойства равновесного рынка оптимальных портфелей и т.д.

Усилия в исследовании операций, естественно, были направлены на рассмотрение многокритериальных задач с большим числом критериев, на изучение и использование задач в динамической постановке, способах адекватного описания случайных процессов изменения цен, на разработку практически применимых численных методов для решения возникающих задач оптимизации большой размерности (см. работы [6 – 10]).

Несмотря на широкий фронт проведенных работ в этом направлении, в портфельной теории остались неизученными некоторые аспекты моделирования процесса принятия решений, особенно связанные с оценкой риска в динамическом случае [10 – 12].

Настоящая работа относится к последнему направлению.

Цель работы состоит в использовании методов теории управления для решения динамических стохастических задач в дискретном времени, для исследования стратегий управления портфелем активов и пассивов и вообще финансовых инструментов в динамическом случае. Основные результаты относятся к динамической задаче при наличии неопределенных факторов в виде марковского процесса и двухкритериальной задаче при учете риска в виде критерия допустимых потерь и ожидаемом доходе как математическом ожидании. В такой постановке для решения задачи по выбору одной из паретовских точек применим формализм динамического программирования. Удается установить принцип линейного разложения оптимального результата текущей оптимальной оценки конечного результата и как следствие установить оптимальность простых стратегий для задачи максимизации математического ожидания конечного результата.

Как известно [10], существует два подхода к задачам управления портфелем ценных бумаг: технический анализ и фундаментальный. Первый характеризуется тем, что реакции лица, принимающего решения, на меняющуюся обстановку – динамику цен – основываются на формальном или неформальном анализе и обработке исторических рядов наблюдения. Второй подход при выработке рационального решения базируется на макроэкономическом анализе факторов, определяющих развитие рынка, и уже на основе экономического анализа формулируется стратегия поведения финансового участника операции. По этой финансовой классификации работа относится скорее к техническому анализу. Применение данного технического подхода имеет большую литературу на Западе и большое поле для применения, особенно в современных условиях быстрого развития вычислительных мощностей и алгоритмов, позволяющих решать задачи большой размерности. Вычислительные аспекты современного состояния теории управления портфелем в случае статических задач большой размерности содержатся в обзоре Г. Марковица [13].

Основные проблемы, которые возникают в процессе использования динамических моделей управления портфелем ценных бумаг, весьма подробно описаны в книге [14].

Настоящая работа состоит из двух частей.

В первой части (гл. 1) приведен (с отдельными комментариями) обзор существующего состояния дел в этой области, опирающийся на статьи [15, 16] и статьи отечественных авторов.

Во второй части (гл. 2) приводятся оригинальные результаты автора, развивающие результаты работы [17]. Основное внимание уделяется постановке задачи управления с двумя критериями (математическим ожиданием и критерием допустимых потерь) и вопросу эффективного решения задачи в случае одного критерия – математического ожидания конечного результата. Последняя задача характерна для случая управления портфелем дисконтных облигаций.

Глава 1. Обзор достигнутых результатов в сфере применения систем управления активами и пассивами

§1. Обзор Западного опыта

1.1. Общие замечания

Динамические модели управления активами и обязательствами (ALM) нашли свое наиболее успешное применение в сфере долгосрочного финансового планирования, где необходимость неоднократного принятия решений определяется существом процесса.

Примеры работы методики ALM включают такие реализованные модели, как модель Frank Russel Company для “Мицубиси” [18], модели для Швейцарского банка, для пенсионных фондов, страховых компаний и ряд других применений, описанных в литературе.

Данный краткий обзор посвящен использованию математических моделей и соответствующих вычислительных комплексов для выбора оптимальной инвестиционной политики долгосрочных инвесторов. При этом учитывается, что ограничения институционального характера, финансовые потоки со своими неопределенностями, операционные издержки, налогообложение и тому подобное являются главными моментами в практическом финансовом планировании.

Пользователи

Описываемые далее области применений включают в себя пенсионные программы, страховые компании, инвестиционные конгломераты, банки, университетские фонды, сбережения состоятельных физических лиц и простых граждан. Эти инвесторы имеют различные собственные цели и обязательства. В процессе принятия инвестиционных решений возникают риски, которые должны измеряться в контексте той финансовой ситуации, в которой оказалась организация или физическое лицо.

Трудности внедрения

Несмотря на очевидность того, что решения о распределении и перераспределении активов имеют существенное значение для инвесторов с диверсифицированными портфелями, многие инвесторы не проводят управление путем активного комбинирования своих стратегических активов. Почему же эти инвесторы игнорируют стратегическое планирование? Причина в следующем.

Имеются лишь немногие компьютерные системы для оценки решений по размещению активов. Для анализа необходимо учитывать единственный в своем роде многочисленный набор преходящих обстоятельств инвестора, и существующие системы не позволяют охватить все это разнообразие. Так, для каждого инвестора должен быть построен уникальный сценарий развития событий, который должен быть логически непротиворечивым и основываться на здравых экономических принципах. Параметры генератора сценариев должны подгоняться к архивной базе данных и к опыту прошлого развития. Стохастическая модель должна принимать в расчет изменчивость экономических условий, например изменение процентных ставок и валютное регулирование. Поведение конкретного инвестора и расположенность его к риску тоже должны приниматься в расчет. Оптимизационная модель должна учитывать управление активами, обязательствами и целевыми выплатами, растянутыми во времени. Все это представляет собой сложную техническую задачу объединения всех перечисленных элементов в единую систему стохастической оптимизации.

Практические приемы

У крупных инвесторов управление активами, т.е. перераспределение их между различными инвестиционными инструментами, обычно состоит из двух шагов. Сначала задаются гарантированные контрольные величины для главных категорий активов (крупные вложения в акционерный капитал, активы, приравненные к наличности, облигации, ценные бумаги обращающиеся на международных рынках и т.д.). После того как такие контрольные значения установлены, инвестор (или инвестиционный комитет) нанимает менеджеров, которые пытаются “превзойти индексы”. Они могут, например, покупать бумаги индексных фондов. (Индексный фонд – взаимный инвестиционный фонд, портфель которого привязан к определенному фондовому индексу, и капиталовложения делаются в ценные бумаги, входящие в данный индекс.) Обычно около одной четверти активных менеджеров “побивали опорные ставки”, но например с 1996 г. по 1998 г. в игре на широко распространенный индекс S&P 500 таких менеджеров было намного меньше. (Составной индекс S&P 500 из 500 акций, рассчитываемый и публикуемый агентством “Стандард энд Пурз”, – один из важнейших фондовых индексов США: 80 % стоимости ценных бумаг на Нью-йоркской бирже; включает акции 400 промышленных, 20 транспортных, 40 финансовых, 40 коммунальных компаний; цены взвешиваются в соответствии с количеством акций каждой компании, т.е. влияние каждой акции пропорционально капитализации компании; индекс рассчитывается непрерывно; базовый период 1941–1943 гг.; базовое значение – 10.) Активным менеджерам надлежит достигнуть или превзойти свой индекс, в противным случае они окажутся перед лицом увольнения. Портфельному менеджеру обычно дается несколько лет работы, чтобы убедиться в его профессиональной квалификации и снизить шансы на наличие случайной удачи в результатах его управления.

Периодически к вопросу стратегического размещения ценных бумаг возвращаются снова. Как правило, оценка качества решений по размещению финансовых средств дается, по крайней мере, раз в год на заседании совета директоров компании. В частности, этот вопрос исследуется в [19]. Рассматривается семь репрезентативных американских клиентов компании "Фрэнк Рассел", которые длительное время использовали профессиональных финансовых менеджеров, чьей целью было "побить опорные ставки с уменьшенным (пониженным) риском" на протяжении 16 кварталов, начиная с января 1985 г. и кончая декабрем 1988 г. Определенный набор ценных бумаг с фиксированной структурой включал в себя: 50% обыкновенных акций американских компаний, 5% обыкновенных акций неамериканских компаний, 30% бумаг с фиксированным доходом (облигации и привилегированные акции, которые приносят фиксированную ставку процента или дивиденда; они более привлекательны в период низкой инфляции), 5% бумаг от вложений в недвижимость и 10% активов, приравненных к наличности. Набор формировался заново ежеквартально. Результаты, полученные исследователями, показывают, что такая "наивная политика" размещения средств сопровождается большой волатильностью (дисперсия целевой функции к году).

Оценки погрешностей

Статьи [20 – 22] касаются статических задач выбора портфеля при целевой функции в виде линейной комбинации среднего и дисперсии. В [20] показывается, что ошибки в оценке среднего значения оказывают решающее воздействие на точность формирования портфеля. При этом погрешности в оценке средних оказываются приблизительно в десять раз более существеннее, чем погрешности в оценке дисперсии. В [21] проводится дальнейшее изучение этой темы, рассматриваются способы отбора входной и выходной информации с целью получения лучших инвестиционных решений. В [22] разработана модель, которая позволяет проследить по истечении некоторого времени за воздействием различных источников на "результат работы" данного портфеля. А именно, капитал распределяется между разными портфелями: ранее предполагавшихся оптимальными, портфелями, интуитивно предпочитаемыми экспертами – менеджерами, портфелями, находящимися под воздействием юридических, политических, диверсификационных и иных ограничений.

Риски

Развитие стохастических моделей многошагового управления активами приводит к улучшению статических стратегий. Вместо прежнего, пассивного управления в интервале времени между заседаниями инвестиционного комитета методы динамического перераспределения активов позволяют постоянно держать портфель соответствующий изменяющимся внешним условиям. Во многих статьях указанного сборника работ [14] демонстрируется превосходство стохастических динамических моделей над стратегиями с фиксированной структурой портфеля, стратегиями купли – владения и т.п. (Стратегия купли – владения – инвестиционная стратегия, заключающаяся в покупке и владении акциями определенной компании на протяжении длительного срока.) Динамические стратегии формально устанавливают взаимоотношение между рисками, которым подвергнуты активы и обязательства, и достижением финансовых целей.

Необходимо установить различие между внутренним и ситуативным риском. Внутренний риск относится к отдельно взятой разновидности ценных бумаг, например к акциям “Майкрософта”. Цена этих акций может увеличиваться или уменьшаться вслед за движением рынка. Такой риск не может быть устранен с помощью диверсификационных стратегий инвесторов, вкладывающих средства только в покупку активов. В противоположность этому риски, не имеющие отношения к движениям рынка, а именно несистемные риски (называемые также нерыночными), могут быть уменьшены с помощью диверсификации. Для инвесторов, имеющих долгосрочные финансовые обязательства, рыночные риски могут быть уменьшены, поскольку финансовое благополучие долгосрочных инвесторов является функцией не только лишь активов, но также и других факторов, среди которых находятся пассивы, процентные ставки (через посредство дисконтирования), целевые выплаты, возможная инфляция.

Классическая общепринятая формула для определения финансового благополучия выглядит следующим образом:

Богатство (Wealth) = Активы – Пассивы.

Мы определим альтернативную меру финансовой устойчивости под названием “избыточное богатство”, которая показывает финансовое положение данного инвестора по отношению к своим финансовым обязательствам и своим целевым задачам.

Избыточное Богатство = Активы – Пассивы (задолженность) – Пассивы (целевое финансирование).

Положительный избыток (положительное сальдо) показывает, что данный инвестор, вероятно, справится с будущими финансовыми обязательствами наряду с финансированием своих целевых задач. А отрицательное сальдо предвещает противоположное, и инвестору следовало бы переоценить свое финансовое положение.

Приведем схему оценки рисков.

Чтобы рассчитать избыточное богатство, мы должны расширить рамки традиционных понятий активов и пассивов. Должны быть построены модели целевых – выплат. Замысел заключается в восхождении по ступеням “эскалации риска” (показанном на схеме), в процессе которого система управления активами и пассивами охватывает все больше и больше деталей, чтобы более репрезентативно отображать финансовые условия инвестора. На верхней ступеньке “лестницы риска” избыточное богатство оценивается по методике “Совокупного интегрированного управления риском” TIRM [23]:

Ступень 5: Тотально-интегральное управления рисками.

Ступень 4: Динамическое управление активами и пассивами.

Ступень 3: Динамическое распределение активов.

Ступень 2: Статические портфели активов.

Ступень 1: Калькуляция цены на отдельную разновидность ценной бумаги.

Области применения

Заслуживают внимания следующие области применения:

• Пенсионные программы.

Специалисты по актуарным расчетам делают оценку пенсионных планов в долгосрочном аспекте с точки зрения будущих взносов в пенсионные фонды, предполагаемых выплат выгодоприобретателям и других будущих неопределенностей.

• Страховые компании.

Аналогично деятельности администрации пенсионных программ, деятельность страховых компаний требует активной политики управления при жестком государственном регулировании. Примеры методики ALM в области страхового дела широко представлены в [14].

- Банки.

Банки медленно реализуют на стратегическом уровне интегрированные системы управления рисками, несмотря на тяжелые проблемы, возникшие вследствие кризиса ссудно – сберегательной системы в США в 1980 гг. и банковский кризис в Японии в 1990 гг. Последний был вызван сильным спадом на земельном и фондовом рынках из-за завышенных оценок недвижимости и высоких процентных ставок. Первый кризис вызвали те аспекты государственного регулирования, что касались взаимоотношений фиксированных и плавающих процентных ставок. По поводу анализа этих кризисных ситуации см. соответственно [24 – 26]. Размещение финансовых средств все чаще основывают на показателе риска, носящего название "стоимость, подвергнутая риску, Value at Risk (VaR)", или критерий допустимых потерь.

- Управление портфелями ценных бумаг и взаимными фондами.

Взаимный фонд – паевой инвестиционный фонд открытого типа, дающий инвесторам доступ к более высоким рыночным процентным ставкам, возможность диверсифицировать риск и экономить на брокерских комиссионных. Многие фондовые менеджеры таких фондов стремятся превзойти какой-нибудь специфический индекс типа упомянутого выше S&P 500 или "Рассел 2000". (Индексы Рассела – взвешенные индексы рыночной капитализации, которые публикуются компанией Франка Рассела в США. Существуют индексы 3000, 2500, 2000, 1000, 500 и т.д. акций)

- Физические лица.

Отдельные лица могут извлекать выгоду, осуществляя управление активами и используя при этом динамические стратегии. В статье [27] описана система многошагового управления активами и пассивами, предназначенная для отдельных лиц, которые производят выбор оптимальных решений. В работе [28] описывается реализованная система, применявшаяся для индивидуальных клиентов крупного итальянского Банка Фидеурам в Риме, где использовалось многопериодное стохастическое программирование.

• Университетские фонды.

По самой своей природе университеты должны рассматривать долгосрочную перспективу, когда им приходится управлять активами собственных фондов. Это обсуждается в статье Р. Мертона [29]. Основная идея статьи: нужно размещать активы таким образом, чтобы использовать благоприятные инвестиционные возможности, которое тесно связаны с платежными обязательствами и финансовыми целями, уменьшая при этом риски. Примером здесь может послужить вложение средств в недвижимость для обеспечения жильем профессорско-преподавательского состава университета в окрестности, окружающей университет. Подобное инвестирование служит двум целям. Во-первых, оно сохраняет территориальную целостность – это достойная цель. Во-вторых, оно помогает компенсировать расходы на жилье преподавателям. Иначе говоря, в качестве добавки к их жалованию субсидируются их жилищные расходы.

• Страхование в промышленности.

Еще одна область применения связана со страхованием промышленных и других крупных предприятий, имеющих “катастрофные” риски потери собственности. В этом случае активами являются главные составные части работающего капитала компании. Выплаты задолженности относятся к решениям по заимствованию. Целевыми выплатами могут быть выплата дивидендов, покупка других компаний и т.д. В результате появляется обширная система управления риском предприятия, выстроенная вокруг генератора сценариев и многошаговой оптимизационной модели. Через посредство управления риском решения по страхованию делаются на самом высоком корпоративном уровне. Страхование в этом случае позволяет прогнозировать будущие прибыли более определенно. Решения такого рода является примером финансовой инженерии [30].

1.2. Структура модели

Процесс инвестирования состоит из $t = 1,2,\ldots,T$ временных шагов. Первый начинается с текущей даты. Конец периода планирования T называют горизонтом планирования. Обычно он отражает некую точку, в которой инвестор имеет определенный конечный замысел планирования. Например, это может быть дата погашения какого-то значительного долга.

В некоторых моделях учитываются краевые эффекты, связанные с финансовой деятельностью в моменты $T+1,\ldots$; см. [31, 32] об общей методике и [33] о применении этой методики в модели Russell-Yasuda Kasai, обсуждаемой в статье [34]. Например, при оптимизационном подходе в некоторых задачах предполагают, что двойственные цены в моменты $T+1,\ldots$ за горизонтом планирования возрастают по отношению к процентной ставке. Это добавляет еще одно ограничение в модели для финансовых переменных.

В начале каждого шага инвестор выбирает решение, принимая во внимание совокупность активов, пассивов и целевых финансовых выплат. Кроме того, требуется учитывать неопределенные факторы и связи между ними. Например, состояние фондового рынка и доходность облигаций коррелированны.

При (количественном) анализе можно использовать систему стохастических дифференциальных уравнений для моделирования изменений стохастических параметров как функции времени в моделях установления цен на активы. Тем самым набор ключевых экономических факторов соотносится с остальными переменными модели, такими как показатели доходности активов и пассивов (см., например, систему Тауэра – Перрина под названием “CAP:Link”, обсуждаемую в работах [35 – 37]).

Основными переменными при принятии решений являются: $x^s_{j,t}$ – инвестиция в актив, $y^s_{k,t}$ – долговая выплата, $u^s_{l,t}$ – целевой платеж. Эти величины соответствуют моменту времени t по сценарию s.

В каждый момент времени в модели состояние оценивается некоторой целевой функцией, а управление осуществляется путем перераспределения между категориями активов, корректировки выплат задолженности и осуществления заданных целевых выплат.

Выбор целевой функции представляет особый интерес (см. соответствующий раздел).

Кроме того, налагаются ограничения на динамический процесс: это задание предельных долей заемных средств, указание операционных издержек при купле/продаже ценных бумаг и финансовых инструментов, иные ограничения. Имеются несколько подходов к включению ограничений в состав модели. Указанные ограничения создают новые предпочтения в дополнение к целевой функции. Например, возникает полезность от ограничений на выплату задолженностей. Эти ограничения также изменяют вид целевой функции, которая во многих случаях, скажем, как в моделях Frank Russell Company, является просто максимальным значением ожидаемого конечного богатства (имеется в виду богатство за вычетом выплаченных неустоек и издержек связанных с прохождением текущих платежей и поступлений и т.д.).

Наша цель состоит в отыскании допустимой точки, где достигает максимального значения целевая функция, рассматриваемая как функция времени. Поскольку мы имеем дело с неопределенностями во времени, оптимальное решение будет выбираться из множества путей изменения богатства инвестора (вместо последнего можно пользоваться другими показателями, например упомянутым выше "избыточным богатством").

Уравнения для финансовых потоков

Имеется два основных уравнения для финансовых потоков.

Для активов j -й категории

$$x^s_{j,t+1} = (x^s_{j,t} + r^s_{j,s}) - p^s_{j,t}(1+t_j) + q^s_{j,t}(1-t^+_j),$$

где j – актив, t – время, s – сценарий, $r^s_{j,s}$ – прибыль от актива j, $p^s_{j,t}$ – объем продаж актива j, $q^s_{j,t}$ – объем покупок актива j, t_j – издержки по купле-продаже актива j для момента времени t по сценарию s.

Для потока платежей и поступлений

$$x_{l,t+1}^{s} = (x_{l,t}^{s} + r_{l,s}^{s}) - \sum_{j} q_{j,t}^{s} + \sum_{j} p_{j,t}^{s}(1 - t_{j}^{-}) + W_{t}^{s} - \sum_{k} y_{k,t}^{s} - \sum_{l} u_{l,t}^{s} ,$$

где W_t^s – приток поступлений в момент t по сценарию s, и поступление образует актив категории l.

Принципиально для многошаговой модели ограничение вида $x_{j,t}^{s_1} = x_{j,t}^{s_2}$ для всех сценариев s_1 и s_2, унаследовавших общее прошлое вплоть до момента t. Иначе говоря, все сравниваемые варианты должны иметь одинаковые предыдущие решения [38].

Целевые функции

Важным составным элементом управления активами и пассивами является нахождение компромисса между риском и денежным выигрышем (в случае принятия уровня риска).

Общепринятая теория размещения активов основывается на теории установления цен на капитальные активы (CAPM) или на арбитражной теории ценообразования, о которых говорится в статьях [39 – 41]. В работе [40] утверждается, что шесть фундаментальных факторов риска – четыре для акций и два для облигаций – объясняют собой большую долю обычной волатильности отдельно взятых международных акций и облигаций. Транснациональные составляющие факторов риска действуют сильнее в странах Европейского союза, чем где бы то ни было. В работе [41] приводится обзор моделей образования цен на активы с учетом факторов риска.

Существуют многочисленные способы оценки финансовых рисков, точно так же как существуют альтернативные способы измерения прибыльности.

Расчет кривых распределения связывает вместе главные неопределенности в любой финансовой организации. Имея в руках функции распределения, мы сможем оценивать не только риски, но и потенциал денежных вознаграждений за их принятие. Обычно мы оцениваем вознаграждение как его ожидаемое значение. Тогда, прибыль или убытки в следующем году: $\sum_{s \in S} p_s z^s$, где p_S – вероятность реализации сценария s, z^s – прибыль или убытки по сценарию s, а S – множество репрезентативных сценариев.

Имеются два базовых подхода к выбору целевой функции.

Во-первых, мы можем применить классическую теорию фон Неймана-Моргенштерна.

В соответствии с постулатами этой теории в условиях неопределенности модель оптимизации имеет вид

$$\max E(v(w)) = \sum_s p_s u(w^s),$$

где $u(w^s)$ – функция предпочтения фон Неймана – Моргенштерна, w^s – богатство инвестора по сценарию s, а p_s – вероятность реализации сценария s.

Во-вторых, мы можем подогнать параметры классической функции полезности под характеристики выходных переменных модели. Общепринятый подход состоит в выборе набора показателей, отражающих степень удовлетворения пожеланий инвестора. Например, можно определить риск как волатильность капиталоотдачи портфеля ценных бумаг, можно налагать штрафы на отклонения выбранных характеристик капитала в некоторые моменты времени от заданных величин и т.д. Штрафам можно приписывать определенные веса, чтобы отразить их относительную важность. Тем целевым выплатам и выплатам задолженностей, которые более "чувствительны" ко времени выплаты, может быть назначен более высокий приоритет, чем менее критичным целевым выплатам. Целевая функция в этом случае будет иметь вид

$$\max f(x) = \max\{\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \ldots + \lambda_k g_k(x)\},$$

где $g_i(x)$ показатель, относящийся к i-й выплате, а λ_i – коэффициент относительной важности для i-й цели.

Выбор целей и установка приоритетов являются сложной задачей удовлетворения привычек, склонностей, меняющихся во времени вкусов и мотивов.

У каждой теории имеются многочисленные варианты, которые могут использоваться в конкретных прикладных задачах в зависимости от особенностей ситуации.

1.3. Основные подходы к решению задач

Для решения задач управления общей является последовательность шагов: генерирование стохастических параметров, выработка целевых установок на весь плановый период, выбор алгоритма решения сформулированной задачи, содержательный анализ полученных результатов.

В рассматриваемых работах для решения задач управления активами и пассивами широко используется четыре основных подхода: решающие правила, наращивание капитала, стохастическое управление, стохастическое программирование.

Решающие правила

Решающим правилом выбора стратегий является функция для расчета значений инвестиций, выплат и других финансовых показателей в каждый элементарный период времени t. Рассматриваются управляющие функции вида

$$x_{j,t} = h(a^s_{j,t}, b^s_{j,t}, \ldots),$$

где a, b – параметры, описывающие развитие процесса. Переменные проиндексированы моментом времени и номером характеристики, но необязательно индексом сценария.

Простым примером служат стратегии с фиксированной структурой активов. В конце каждого периода времени инвестор продает переоцененные активы и покупает недооцененные активы, сохраняя при этом целевой уровень соотношения категорий активов, например 60 % акций – 40 % облигаций. Правило фиксированной структуры записывается следующим образом

$$e_j = {x^s_{j,t}}\Big/{\sum_j x^s_{j,t}},$$

где e_j – фиксированная доля актива j.

Решающие правила в таком виде легко реализуемы и удобны для использования. В работе [14] отмечено, что стратегии с фиксированной структурой снижают риск и улучшают капиталоотдачу по сравнению с пассивной стратегией купли – владения. Имея несколько решающих правил, инвестор в состоянии построить многопериодную модель управления активами и пассивами для оптимизации некоторой целевой функции. Однако такие оптимизационные задачи (сравнительно небольшие по объему вычислений) зачастую приводят к невыпуклым моделям и к необходимости решения глобально-оптимальных задач.

Наращивание капитала

Данная стратегия определяется как локально – оптимальная стратегия, когда потенциальный инвестор, стремясь максимизировать долгосрочный рост активов, оптимизирует активное богатство шаг за шагом, принимая некоторую функцию полезности. В работе [42] показано, что при определенных допущениях это достигается путем максимизации ожидаемого значения логарифма активного богатства. В работе показано, что такая стратегия на самом деле асимптотически максимизирует долгосрочное активное богатство и минимизирует время достижения одной специфической цели для целевых выплат. При всех своих достоинствах крупным недостатком данного подхода является тот факт, что стремление к локальному наивысшему темпу роста капитала сопровождается колебаниям богатства с большой волатильностью. К настоящему времени разработаны различные модификации данного подхода, что позволило получить неплохие результаты долгосрочного инвестирования на основе архивных данных для США в период с 1934г. по 1988 г. [43]. Как показал анализ рынка, эти стратегии помогли сделать множество больших личных состояний для лиц, которые не побоялись принять на себя значительный риск.

Стохастическое управление

Данный подход восходит к работам [44 – 46]. Ключевая идея подхода состоит в использовании уравнений в непрерывном времени для описания динамики изменения финансовых переменных: цен на активы, потока платежей и т.д. В качестве критерия оптимальности рассматривается интегральный показатель математического ожидания функции полезности в полном соответствии с классическими аксиомами фон Неймана – Моргенштерна. В работе [15] отмечаются классы задач, для которых применение данного подхода оказывается успешным. В частности, в статье [47, 48] используется модель с непрерывным временем мертоновского типа, где капиталоотдача активов зависит от таких фундаментальных факторов, как процентные ставки, дивидендный доход, отношение P/E цены акции к ее доходу и т.п. Показывается, что высокодоходные активы с повышенным риском представляются более безопасными, если горизонт управления более удаленный.

Стохастическое программирование

Задачи стохастического программирования возникают при использовании процессов с дискретным временем для описания изменений финансовых переменных в динамике. Ключевая идея состоит в генерировании множества сценариев реализации случайных параметров в виде дерева и выборе управлений в вершинах дерева. Этому подходу будет уделено основное внимание в настоящей работе. Практическое использование подхода стохастического программирования позволяет учитывать в моделях разнообразные обстоятельства.

В работе [15], опираясь на опыт коллектива исследователей Frank Russell Company, приводится перечень тех возможных характеристик, которые могут быть учтены в многошаговых моделях стохастического программирования:

- Наличие многих периодов принятия решений; краевые эффекты задаются в виде наступления некоторого стационарного состояния за горизонтом планирования.
- Согласованность с экономической и финансовой теорией.
- Дискретные сценарии для случайных переменных: капиталоотдачи, стоимости задолженности, динамики валютных курсов и т.д.
- Учет дополнительных стохастических характеристик.

- Институциональные, юридические и политические ограничения.
- Наложение штрафов за нарушение целевых ограничений.
- Компромисс между краткосрочными, среднесрочными и долгосрочными целями.
- Моделирование производных финансовых инструментов и неликвидных активов.
- Моделирование операционных издержек, налогов и т.д.
- Разнообразное описание риска в терминах, понятных для лиц, принимающих решения.
- Максимизация ожидаемой полезности финального богатства за вычетом стоимости штрафов и неустоек.

Приобретенный к настоящему времени опыт позволяет решать весьма реалистичные многопериодные задачи на рабочих станциях с использованием алгоритмов математического программирования. В [34, 49 – 52] приводятся примеры успешного применения модели. Так, в работе [34] на простой трехпериодной модели, использовавшейся на протяжении пяти лет, демонстрируется, каким образом претерпевает изменения стратегия с течением времени и в процессе выявления характеристик неопределенности.

Плюсы и минусы четырех подходов

Каждый из четырех подходов к динамическому инвестированию имеет в себе нечто привлекательное. Решающие правила гораздо проще для реализации, а соответствующие оптимизационные задачи не заставляют нас прибегать к крупномасштабным процедурам линейного и нелинейного программирования. Они могут быть без труда протестированы на выбранных сценариях (путем имитации) и обеспечивают приемлемые доверительные интервалы для рекомендаций. Они интуитивно ясны для большинства профессиональных инвесторов. Однако они способны привести к невыпуклым моделям оптимизации, которые требуют интенсивных расчетов для нахождения глобально-оптимального решения. Кроме того, правила, естественно, могут привести к субоптимальному поведению. Стохастическое программирование дает основу для построения моделей общего назначения, которые могут принимать во внимание особенности реального мира, такие как ограничения на оборотные средства операционные издержки, неприятие риска, налоги, предельные ограничения на группы активов и иные соображения. Оно требует высокоэффективных алгоритмов для решения задач из-за огромного числа переменных, участвующих в решении, особенно в многошаговых задачах с четырьмя и более этапами. Типичные прикладные модели исследовательской группы компании Фрэнка Рассела [14] являются пятиэтапными. Рекомендации группы могут подвергаться практической проверке, однако вычислительные издержки здесь настолько высоки, что он оказывается практически неприемлемым для многих пользователей. Лимитирующим фактором является и выбор сценариев на основе стохастической модели.

Модели наращивания капитала приводят к высокому росту активов, однако, при наличии значительного риска. Когда контроль политики наращивания капитала производится посредством модифицированных стратегий, такая политика приводит к выбору между потерей на одной ценной бумаге и приобретением на другой ценной бумаге, что в итоге обеспечивает повышенный рост капитала. Однако процесс генерирования активов в модели должен быть простым, с простыми соображениями в отношении пассивов. Здесь сравнительно нетрудно получать решения, если данные имеются в наличии. Политика выбора имеет тенденцию концентрироваться на небольшом числе лучших активов и, следовательно, может быть недостаточно диверсифицирована. Кроме того, как и при стохастическом управлении, политика распределения капитала по активам здесь весьма чувствительна к входным параметрам.

Стохастическое управление – это еще одна общая схема для решения задач общего характера. Он применим к тем задачам, где можно реально оперировать в пространстве состояний, т.е. к задачам с тремя или четырьмя (самое большое) переменными. Как и при стохастическом программировании, трудно сгенерировать доверительные пределы. Ошибки моделирования могут также возникать из-за аппроксимации в пространстве состояний. Трудность в точном определении общих ограничений на процесс сужает область приложений метода стохастического контроля. Однако метод имеет концептуальное превосходство над стохастическим программированием (в тех случаях, когда метод может быть реализован на практике), потому что здесь нет необходимости в выборочных сценариях. Требуется многое сделать, чтобы воплотить в жизнь лишь только модели для одних активов на базе существующей теории, в частности для случая ограничений на веса активов, – не говоря уже о разработке теории и приложений для управления активами и пассивами.

Подводя итог, мы констатируем, что среди четырех кандидатов нет явно выраженного победителя. Мы предлагаем, чтобы инвесторы начинали свои расчеты сразу на нескольких конкурирующих моделях и правилах принятия решений. Их можно без труда реализовать и оптимизировать. Избранные решающие правила могут служить отправными точками и ориентирами для более сложных моделей стохастического программирования и стохастического контроля. Можно также сочетать модели стохастического программирования и решающие правила для получения оценок доверительных интервалов при выдаче рекомендаций после моделирования. Желательны также и модели, комбинирующие элементы всех четырех описанных выше подходов.

1.4. Генерирование сценариев

Решающий аспект использования систем управления активами и пассивами связан с моделированием базовых стохастических параметров, таких как процентные ставки, показатели инфляции и доходности ценных бумаг. Любой сценарий описывает отдельно взятый, логически последовательный набор значений параметров на протяжении всего планового периода. Коэффициенты должны быть внутренне согласованы в рамках единого сценария. Например, доходы на облигацию должны соответствовать изменениям процентных ставок. (См. статью [53] по поводу однофакторной модели процентной ставки, которая была использована в многопериодном стохастическом программировании.) Барицентрическая аппроксимация этого процесса порождает дерево сценариев, где по каждому сценарию принимают в расчет разнообразные подвижки временной структуры. (Временная структура процентных ставок – система взаимосвязей между процентными ставками по определенному финансовому инструменту на разные сроки.) Эмпирические результаты установлены для шести – и восьмипериодных моделей (см. также

[51, 52] по поводу подходов к генерированию дискретных сценариев на основе многомерных логарифмически-нормальных распределений). Доходы по валютным активам должны генерироваться с помощью динамики валютного рынка (см., например, статьи [54 – 57]). Принцип адекватности модели требует, чтобы небольшая совокупность экономических факторов определяла последующие результаты, как это записано ниже.

Экономические факторы (например, процентные ставки) – доходы по активам, поток платежей по задолженностям, учетные ставки и приведенная стоимость обязательств.

Поскольку подсчет избыточного богатства требует одновременного вычисления значения стоимости активов за вычетом текущей стоимости обязательств по какому-то заданному сценарию, необходимо описать такое движение процентных ставок, какое напрямую связано с доходностью активов, включая сюда государственные и корпоративные облигации. В общем случае предполагается, что процентные ставки отслеживаются и контролируются центральными банками, по крайней мере, стран Большой семерки.

Другая проблема, возникающая при выборе сценариев, состоит в необходимости строить дерево сценариев, когда речь идет об использовании моделей стохастического программирования. Такой проблемы нет при использовании решающих правил.

Оценивание “тяжелых хвостов” распределений, характерных для рынка активов, может быть проделано несколькими способами. Например, обработка статистических данных за 105 лет функционирования фондового рынка показала, что такие “хвосты” лучше всего описываются распределением Фреше [58]. Метод, использующий различие в ценах исполнения на опционы колл и пут в один и тот же момент времени, показал, что “хвосты” стали “тяжелее” после биржевого краха 1987 г. [59].

Существенное значение для постоптимального анализа имеет оценка чувствительности оптимальных значений критериев эффективности к параметрам сценариев, что может выполняться, например, с путем варьирования сценариев в моделях стохастического программирования.

Корреляции играют существенную роль в построении диверсифицированных портфелей. Оценивание этих характеристик обычно проделывают, используя исторические ряды прошлых данных. Когда наступают экстремальные события, здесь возникают проблемы, поскольку корреляции возникают именно во время напряженных периодов. Например, за семь лет вплоть до биржевого краха в октябре 1987 г. любая выборка из двадцати трех наиболее важных стран никогда не имела все показатели капиталоотдачи положительно коррелированными за любой отдельно взятый месяц. Однако это произошло в октябре 1987 г.

Наконец, агрегирование переменных и представление сценариев являются важнейшими частями работы при построении модели.

1.5. Алгоритмы решения

Стохастическое программирование

Вычислительные трудности возникают из-за свойств дерева сценариев, лежащего в основе подхода стохастического программирования. Число переменных, участвующих в решении, нарастает экспоненциально. В большинстве случаев можно обрезать дерево, намеренно сокращая число ветвей, исходящих из вершин, особенно для вершин, расположенных ближе к горизонту планирования.

Основные алгоритмы для получения решений в стохастическом программировании распадаются на три группы: прямые методы, прежде всего методы внутренней точки, методы декомпозиции Бандерса и методы декомпозиции на основе модифицированных функций Лагранжа. Эти методы высокоэффективны и используют специфику древовидной структуры множества сценариев. В настоящее время возможно решать задачи нелинейного стохастического программирования с числом сценариев свыше 10000. И что более важно, время счета по программе является линейной функцией числа сценариев. Таким образом, учитывая рост быстродействия компьютеров на 40 – 50 % в год, можно наращивать размерность задач стохастического программирования аналогичным образом. В то же время отметим, что необходим компромисс между реалистичностью модели и удобством ее использования.

Оптимальные решающие правила

Главная вычислительная трудность при решении оптимизационных задач в моделях на основе решающих правил вызвана невыпуклостью. Затруднительно напрямую использовать стандартные алгоритмы нелинейного программирования, поскольку они ориентированы на поиск только точек локального оптимума. Обычно повторно запускают алгоритм из множества случайно выбранных точек и сравнивают полученные оптимальные значения. В качестве альтернативы можно пытаться использовать любые методы глобальной оптимизации, ограничиваясь решением задач с умеренным числом переменных.

Наращивание капитала

Этими моделями описываются набор однопериодных статических представлений о выборе из одних активов, меняющихся с течением времени. В этих случаях оптимизация связана с нахождением оптимума вогнутой функции на выпуклом многограннике или в общем случае на выпуклом множестве, а следовательно, могут привлекаться стандартные программы нелинейного программирования.

Стохастическое управление

После того как пространство переменных определено (как правило, не более четырех), непрерывная задача разрешается с помощью стандартных подходов, таких как метод динамического программирования или метод конечных разностей. Варианты инвестиционной политики, получаемые из этих моделей, выражаются в виде долей активов, входящих в портфель, которые резко меняются во времени, что очень сильно влияет на оценки среднего значения, которые модель и пытается предсказать. Тем не менее модели стохастического управления обеспечивают обоснование для некоторых классов решающих правил.

1.6. Перспективы на будущее

Итак, приведен обзор сферы применения систем динамического стохастического управления активами и пассивами. Предложено четыре альтернативных подхода к моделированию: многошаговые решающие правила, стохастическое программирование, наращивание капитала и стохастическое управление. Каждый подход имеет свои преимущества над другими, и ясно, что среди них нет наилучшего. Кроме того, на практике широко применяются имитационное моделирование и варианты модели “среднего – дисперсии” (типа Марковица). Весьма значительные суммы ставятся на карту, когда разрабатываются стратегические планы для инвесторов с портфелями ценных бумаг, стоящих миллиарды долларов. Малый процентный доход, накапливаясь в течение ряда лет в виде сложных процентов, дает в результате большую прибыль. Таким образом, для многих организаций возможные доходы от систематического инвестирования перевешивают сомнения по поводу проблем, связанных с реализацией динамической стратегии инвестирования.

Каковы возможные направления будущих исследований?

Во-первых, существует логически обоснованная потребность в оценках робастности (таких, как доверительные интервалы) предлагаемых рекомендаций определенной модели управления активами и пассивами. И стохастическое программирование, и стохастическое управление испытывают недостаток в этом. Многообещающее направление связано с комбинированием решающих правил и стохастического программирования, которое выполняется при помощи техники уменьшения дисперсии [60]. Могут оказаться возможными и другие гибридные подходы.

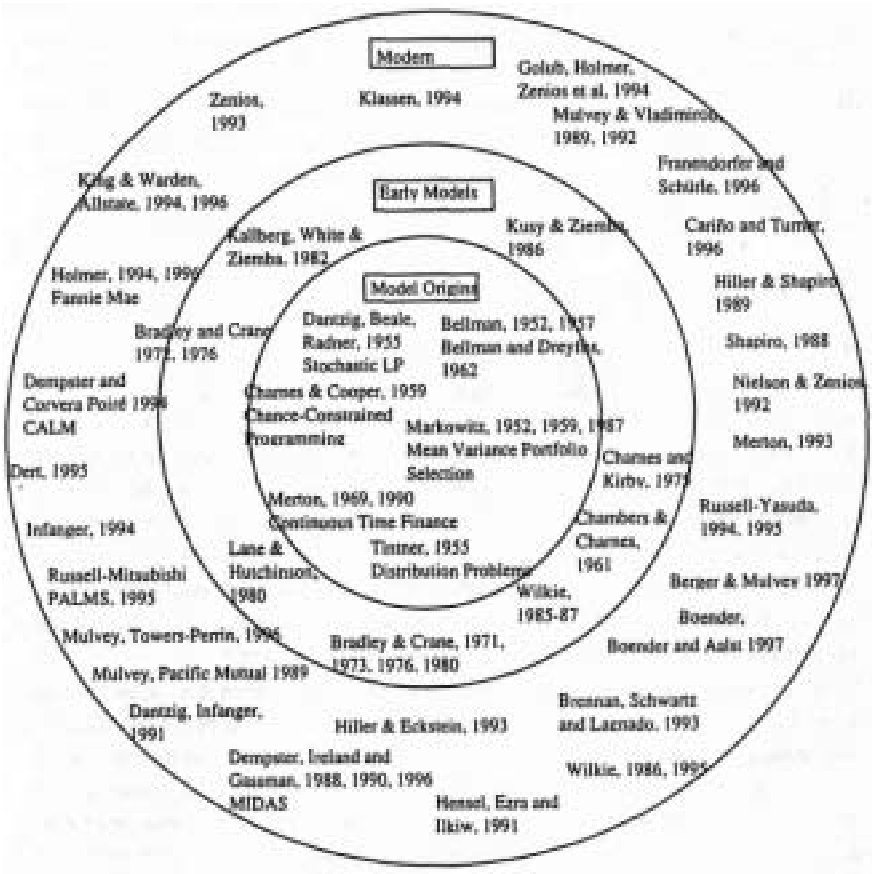
Во-вторых, для успеха долгосрочного планирования будет иметь решающее значение общепринятое определение риска с учетом факторов времени. Необходимо стремиться к компромиссу между кратковременным страданием и долговременным процветанием. Трудно принимать компромиссное решение, не имея ориентира на жизнеспособные позиции в будущем. Теория многоцелевой оптимизации владеет рядом многообещающих технических приемов для оказания помощи инвесторам при анализе их будущих возможностей.

В-третьих, сейчас имеется подходящая возможность оформлять ценные бумаги по индивидуальному заказу, чтобы приспособить их к окружающей обстановке для отдельного инвестора. Например, активное сальдо у инвестора могло бы быть восприимчиво к внезапному скачку вверх процентных ставок, а также к падению американского доллара. Хотя такое сочетание событий могло бы оказаться сравнительно редким, (потому что процентные ставки и валютные курсы в принципе положительно коррелированны), но институциональный инвестор не должен целиком игнорировать этот сценарий. Система управления активами и пассивами может сформировать оценку относительно привлекательности любой ценной бумаги, оформленной по индивидуальному заказу. Система управления активами и пассивами способна также формировать основу для ценообразования на упомянутые индивидуализированные ценные бумаги, скажем, с помощью двойственных переменных из задач нелинейного оптимального программирования. В будущем инвесторы окажутся в состоянии конструировать ценные бумаги со специфицированной схемой доходов (капиталоотдачи), разумеется, в заданных пределах. **Финансовая инженерия** создает все возрастающие возможности для управления риском, причем упор здесь делается на учет временного фактора. [10, 61]. Таким образом, мы смогли бы покупать ценную бумагу, которая приводила бы в исполнение особую стратегию динамического инвестирования. Системы динамического управления активами и пассивами идеальны для оценивания этих новых, комплексных финансовых возможностей.

Самые изощренные модели управления активами и пассивами разработаны североамериканскими и британскими исследователями, которые хорошо представлены в [14]. Но, быть может, более продвинутое использование таких моделей осуществлено голландцами, в значительной степени благодаря традиции, а также из-за ситуации с регулированием фондового рынка в Голландии.

1.7. Исторический экскурс

Три концентрических круга на рисунке показывают, хотя и схематично, развитие событий на рассматриваемом поле деятельности, начиная от основания Данцигом, Беллманом, Марковитцем, Мертоном стохастической оптимизации в 1950 гг. и 1960 гг. Далее идут ранние модели Бредли и Крэйна, Чарнеса и его учеников, Зиембы и его учеников в 1970 гг. и 1980 гг. Затем имело место значительное продвижение в развитии подобных моделей многими исследователями в 1990 г., чему содействовали новые вычислительные возможности и огромные суммы ресурсов, которыми нужно было управлять в остро конкурентной обстановке. Поле исследований быстро расширяется, однако их приложения все еще пребывают в младенческом состоянии. Потенциальные возможности моделей стохастического программирования по улучшению результатов деятельности инвесторов и избежанию финансовых бедствий, несомненно, значительно возрастут в будущем. Большие конференции, такая как состоявшаяся в августе 1998 г. [ALM meeting in Vancouver], обсуждали и документально подтвердили достижения теории и практики использования моделей управления активами и пассивами.



§2. Пример задачи стохастического программирования

2.1. Многошаговая модель динамического управления портфелем ценных бумаг CALM [16]

Многошаговое стохастическое программирование находит широкое применение при постановке и решении финансовых задач, характеризующихся большим числом переменных состояния и, как правило, небольшим числом этапов принятия решения. Литература по применению многошагового рекуррентного моделирования для формализации сложных задач оптимизации портфелей ценных бумаг восходит к началу 1970 гг. XX в., когда были впервые взяты на вооружение финансистов методы решения проблемы портфеля ценных бумаг с фиксированной доходностью. Здесь описывается модель CALM, которая была разработана для учета влияния неопределенностей как на активы (и в самом портфеле, и на рынке), так и на пассивы (в форме зависящих от сценария платежей или стоимости займов). Портфельный менеджер, у которого имеется первоначальное богатство (Wealth), изыскивает способы максимизации конечного богатства на горизонте планирования, причем доходы от инвестирования моделируются как случайные векторы в дискретных точках пространства состояний. Векторы решений представляют из себя возможные инвестиции в рыночные активы или продажу последних из портфеля, а также владение ими (на протяжении какого-то времени). Другими компонентами вектора решений являются решения о заимствовании средств по какой-либо кредитной линии или с депозита в банке. В работе [16] результаты вычислительных экспериментов представлены для серии 10 шаговых портфельных задач, при решения которых использовались различные методы и библиотеки программ (OSL, CPLEX, OBI). Задача о портфеле на основе случайного векторного процесса, допускающего вплоть до 2688 реализаций на протяжении 10 летнего планового периода, была решена на IBM 6000/590. Получены решения 24 тестовых задач большой размерности с помощью программ симплекс-метода и барьерных методов из библиотеки CPLEX (последние для линейных или квадратичных целевых функций); метод внутренней точки с предиктором – корректором из библиотеки OBI; симплекс-метод из OSL; MSLiP – OSL – метод декомпозиции Бандерса с решением подзадач при помощи симплекс-метода OSL и нынешней версии MSLiP.

Описываемая далее вычислительная технология обеспечивает основу для рационального корпоративного финансового планирования на базе моделей, охватывавшего сроки порядка десятилетия. Подобное планирование становится возможным благодаря реалистическому характеру моделей этого типа, быстрому прогрессу в программном обеспечении и аппаратных средствах для повышения производительности компьютеров, благодаря наличию всеобщей потребности в моделировании, и ужесточению контроля за финансовыми рисками в современных глобальных корпорациях, начиная от банков и кончая производственными подразделениями, с использованием широкого набора технических приемов от самых простых до самых сложных.

Модель CALM выросла из исследований по стохастическому динамическому программированию, которые начались свыше двух десятилетий тому назад вместе с появлением работ [72, 73]. Перечень последующих работ, связанных с данным предметом исследований, изложен в публикациях [50, 74 – 77].

Быть может, самой важной из этих публикации является статья Бредли и Крейна [72], которые впервые предложили "инвентаризационный" подход к моделированию финансовых решений, где каждый актив или пассив в модели имеет на каждый (элементарный) период времени свой "приход", "расход" и "наличный запас", описываемые соответствующими переменными; статья Демпстера и Айерленда [75], которые исследовали неотъемлемые от таких моделей связи с информационными системами; статья [74], где разработано первое подлинно коммерческое приложение динамического стохастического программирования. Несмотря на тот факт, что до них существовало множество предшественников в разных финансовых учреждениях, но предшествующие работы можно рассматривать в лучшем случае как прототипы предложенной системы.

Многошаговые модели приводят к задачам большой размерности, весьма сложным, хотя и обладающим линейными ограничениями, причем структура ограничений линейно нарастает по размерам вместе с числом траекторий прохождения информации, или сценариев, которые представляют совокупность неопределенностей, возникающих у лиц, принимающих решение. Отсюда следует, что практические модели должны осуществлять свою работу с помощью таких средств программного обеспечения, которые обобщают и используют языки моделирования для линейного программирования (ЛП) вроде GAMS и MODLER (последний используется в данной работе).

2.2. Формулировка задачи

Рассматривается задача стохастического программирования в форме многошаговой рекуррентной задачи [78 – 81]:

$$\min_{x_1 \in R^{m_1}} \{ f_1(x_1) + E_{\omega_2} [\min_{x_2} (f_2(x_2) + \ldots + E_{\omega_T | \omega^{T-1}} [\min_{x_T} f_T(x_T)])] \},$$

при условии

$$\begin{cases} A_1 x_1 = b_1, \\ B_2 x_1 + A_2 x_2 = b_2, \\ B_3 x_2 + A_3 x_3 = b_3, \\ \ldots \\ B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T, \end{cases}$$

$l_1 \le x_1 \le u_1$, $l_t \le x_t \le u_t$, $t = 2, \ldots, T$,

в этой записи слагаемые функционалы f_t определяются для элементарных периодов, начиная с $t = 1$ вплоть до горизонта планирования T; матрица $A_1 \in R^{m_1, n_1}$ и вектор $b_1 \in R^{m_1}$ определяют детерминированные ограничения на первом шаге решения, а для $t = 2, \ldots, T$, матрицы $A_t : \Omega \to R^{m_t, n_t}$, матрицы $B_t : \Omega \to R^{m_{t-1}, n_{-1t}}$ и вектора $b_t : \Omega \to R^{m_t}$ определяют области стохастических ограничений для последовательно выбираемых решений $\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Через $E_{\bar{\omega}_t | \bar{\omega}_{t-1}}$ обозначаются условные математические ожидания функций от случайного вектора $\bar{\omega}_t$ информационного процесса $\bar{\omega}$ в момент времени t при заданной истории $\bar{\omega}_{t-1}$ процесса до момента времени t. Из приведенной рекуррентной записи явно следует зависимость оптимальной политики, $\bar{x}^0 = (\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \ldots, \bar{x}_T^0)$ от реализаций векторного информационного процесса $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_T)$.

Данная модель является стандартной задачей принятия решений в условиях неопределенности.

• Достижение цели при таком блочном представлении формализуется в виде последовательности оптимизационных задач, соответствующих различным шагам: в момент времени 1 лицо, принимающее решение, должно выбирать некое решение, последствия которого полностью зависят от будущих реализаций заданного многомерного стохастического информационного процесса.

• Соответственно для каждой реализации истории ϖ^t информационного процесса вплоть до времени t рассматривается рекуррентная задача, в которой искомым решениям является (x^{t-1}, ω^t). На каждом шаге предыдущие решения воздействуют на текущую задачу посредством матриц $\overline{B}_t$, $t = 2, \ldots, T$, вместе с последовательностью решений: решение – наблюдение, наблюдение – решение $x_1 \to \omega_2 \to \ldots \to \omega_T \to x_T$.

• Информационный процесс ϖ определен как векторный стохастический процесс с дискретным временем. Конечная выборка из его траекторий удобно представляется в виде дерева сценариев: каждый сценарий соответствует траектории процесса $\varpi^T = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T)$ на горизонте T.

• В сформулированной задаче, как и вообще в задачах финансового планирования, ограничения сверху и снизу, зависят от сценариев. Корректное генерирование выборочных траекторий информационного процесса для данной задачи является решающим фактором надлежащей формулировки задачи стохастической оптимизации.

Динамические задачи управления портфелем ценных бумаг легко формулируются в виде динамических рекуррентных соотношений. Впервые этот подход был применен к управлению портфелем [72] ценных бумаг с фиксированной доходностью. О других приложениях схемы рекуррентного принятия решений к финансовому планированию можно прочитать в перечисленных выше работах. Во многих из приведенных работ неопределенность проявляется в форме неизвестных будущих ставок дохода рыночных инвестиций и источников денежных потоков, равно как и в форме разбалансированности поступлений и платежей, а целевая функция обычно определяется в виде математического ожидания линейной или нелинейной функции полезности на горизонте планирования (иногда за горизонтом планирования).

Исходной задаче может быть придано более компактное представление с использованием схемы динамического программирования, которая применима вследствие принятой структуры матрицы ограничений.

Для каждого момента времени $t = 1, \ldots, T-1$ нам нужно найти

$$\min_{x_t}[f_t(x_t) + \upsilon_{t+1}(\omega^t, x^t)].$$

При этом $B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t$, где υ_{t+1} выражает оптимальное ожидаемое значение критерия для шага $t+1$ при наличии истории решений $x^t = (x_1, \ldots, x_t)$ и реализованной истории случайного процесса $\omega^t = (\omega_1, \ldots, \omega_t)$. А именно,

$$\upsilon_{t+1}(\omega^t, x^t) = E_{\varpi_{t+1}|\varpi^t}[\min_{x_{t+1}}(f(\bar{x}_{t+1}) + \ldots + E_{\varpi_T|\varpi^{T-1}} \min_{x_T}(f_T(x_T))].$$

Здесь минимизация проводится с учетом соответствующих ограничений, которые будут обсуждаться ниже при преобразовании исходной задачи к детерминированному варианту.

Соответственно портфельный менеджер в конце каждого (элементарного) периода времени на основе текущей информации выбирает оптимальное решение при наличии неопределенностей на момент принятия решения. Это решение должно быть допустимым решением по отношению к тем ограничениям, которые индуцированы будущими значениями случайного информационного процесса и текущим состоянием портфеля.

Благодаря выпуклости функции $\upsilon_{t+1}(\omega^t, x^t)$ по переменной x^t, рекуррентная задача может быть также сформулирована следующим образом:

найти $\min\limits_{x_t} f_t(x_t) + \theta_t$

при наличии условий $B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t ,. \upsilon_{t+1}(\omega^t, x^t) \le \theta_t$.

Применение алгоритма секущей плоскости для решения этой задачи основано на простой декомпозиции путем аппроксимации целевой функции в момент времени $t+1$ множеством сечений вида $d'x_t \le \theta_t$, [79, 82 – 84]. Сечения также используются, чтобы наложить ограничения на текущие решения, которые обеспечивают допустимость последующих рекуррентных решений.

2.3. Стандартные методы решения задач стохастического программирования

Возможны две процедуры получения решений для детерминированного эквивалента исходной динамической портфельной задачи.

- Прямое решение задачи детерминированного эквивалента, в котором условные вероятности повторно вычисляются на каждом шаге для всех информационных траекторий. Программы для решения задач линейного и квадратичного программирования очень большой размерности имеются в наличии и способны решать задачи, используя соответственно стандартные алгоритмы линейного программирования (т.е. симплекс-метод и метод внутренней точки) и квадратичного программирования (итеративный алгоритм, или на основе метода внутренней точки).
- Или в качестве альтернативы первоначальная задача может быть подвергнута разложению в последовательность подзадач, которые с вычислительной точки зрения связаны пошагово, а затем может быть применен метод блочной декомпозиции Бандерса.

Приведем подробное описание для первого представления.

Предположим для простоты, что из каждой вершины дерева решений выходит одинаковое число ветвей в один элементарный период времени, а соответствующие условные вероятности обозначим через $p_t^{k_2,k_3,\ldots,k_t}$, $t = 2,\ldots,T$. Эти допущения позволяют сформулировать детерминированный эквивалент исходной задачи в виде

$$\min\{f_1(x_1)+$$
$$+\sum_{k_2=1}^{K_2}[p_2^{k_2} f_2(x_2^{k_2})+\sum_{k_3=1}^{K_3}[p_3^{k_2,k_3} f_3(x_3^{k_2,k_3})+\ldots+\sum_{k_T=1}^{K_T} p_T^{k_2,\ldots k_T} f_T(x_T^{k_2,\ldots,k_T})]]]\}$$

где

$$\begin{cases} A_1 x_1 = b_1, \\ B_2^{k_2} x_1 + A_2^{k_2} x_2^{k_2} = b_2^{k_2}, \quad k_2 = 1,\ldots,K_2, \\ B_3^{k_2,k_3} x_2^{k_2} + A_3^{k_2,k_3} x_3^{k_2,k_3} = b_3^{k_2,k_3}, \quad k_t = 1,\ldots,K_t, \quad t = 2,3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_T^{k_2,\ldots,k_T} x_{T-1}^{k_2,\ldots,k_{T-1}} + A_T^{k_2,\ldots,k_T} x_T^{k_2,\ldots,k_T} = b_T^{k_2,\ldots,k_T}, \quad k_t = 1,\ldots,K_t, \quad t = 2,\ldots,T, \end{cases}$$

$l_1 \le x_1 \le u_1$, $l_t \le x_t^{k_2,\ldots,k_T} \le u_t$, $t = 2,\ldots,T$,

здесь вектор переменных решения соответствует каждой вершине дерева решений.

В матричных обозначениях многошаговая линейная задача записывается следующим образом:

найти $\min\limits_{\hat{x}} \hat{c}'\hat{x}$ при условии, что $\hat{A}\hat{x} = \hat{b}$, $\hat{x} \ge 0$,

где $\hat{c} = (c_1', (p_2^1 c_2^1)', \ldots, (p_2^{K_2} c_2^{K_2})', (p_3^{1,1} c_3^{1,1})', \ldots,$

$, \ldots, (p_3^{K_2,K_3} c_3^{K_2,K_3})', \ldots, (p_T^{1,\ldots,1} c_T^{1,\ldots,1})', \ldots, (p_T^{K_2,\ldots,K_T} c_T^{K_2,\ldots,K_T})')'$,

$\hat{x} = (x_1', x_2'^1, \ldots, x_2'^{K_2}, \ldots, x_T'^{1,\ldots,1}, \ldots, x_T'^{K_2,\ldots,K_T})'$,

$\hat{b} = (b_1', b_2'^1, \ldots, b_2'^{K_2}, \ldots, b_T'^{1,\ldots,1}, \ldots, b_T'^{K_2,\ldots,K_T})'$.

$$
\begin{pmatrix}
A_1 & 0 & \ldots & & & \ldots & & & & 0 \\
B_2^1 & A_2^1 & 0 & \ldots & & \ldots & & & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ldots & & & & \vdots \\
B_2^{K_2} & 0 & \ldots & A_2^{K_2} & 0 & & & \ldots & & 0 \\
0 & B_3^{1,1} & & & A_3^{1,1} & 0 & \ldots & & & 0 \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & & & & 0 \\
0 & B_3^{1,K_3} & & & \ldots & & & & \ldots & 0 \\
 & & & B_3^{K_2,K_3} & \ldots & & A_3^{K_2,K_3} & & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 & & & & & & B_4^{K_2,\ldots,K_4} & & & \\
 & & & & \ldots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & & & & & B_T^{K_2,\ldots,K_T} & \ldots & A_T^{K_2,\ldots,K_T}
\end{pmatrix}
$$

В общей T – шаговой задаче, где число локальных задач при вершине на шаге t равно $\prod_{s=2}^{t} K_s$, а размерность матрицы ограничений равна (m_t, n_t), мы имеем $\hat{c} \in R^{\hat{n}}$, $\hat{x} \in R^{\hat{n}}$, $\hat{b} \in R^{\hat{m}}$, $\hat{A} \in R^{\hat{m}\hat{n}}$, где

$$\hat{n} = n_1 + K_2(n_2 + K_3(n_3 + \ldots + K_T n_T)),$$
$$\hat{m} = m_1 + K_2(m_2 + K_3(m_3 + \ldots + K_T m_T)),$$

что порождает в конечном счете задачи весьма большой размерности по мере нарастания числа сценариев.

Прямая задача линейного программирования:

найти $\min\limits_{\hat{x}}\{\hat{c}'\hat{x} \mid \hat{A}\hat{x} = \hat{b}, \quad \hat{x} \ge 0\}$

Двойственная задача линейного программирования:

найти $\min\limits_{\hat{\pi}}\{\hat{b}'\hat{\pi} \mid \hat{\pi}'\hat{A} \le \hat{c}'\}$.

Эти задачи решаются с помощью симплекс – метода или метода внутренней точки. Главные проблемы, возникающие при решении этих задач, связаны с чрезвычайно большой размерностью, которой достигают подобные задачи линейного программирования.

§3. Примеры из отечественной практики

Отметим, что качественный уровень решения задач оптимального управления активами и пассивами в отечественной практике вполне соответствует мировому уровню. Достаточно привести пример работы, в которой непосредственно принимал участие автор [17]. В этой работе использованы все известные подходы в исследовании операций и системном анализе, которые были накоплены в практике решения задач рационального выбора управлений в условиях неопределенности для различных сфер экономики [1 – 3].

Кроме того, можно привести примеры построения имитационных моделей, моделей пассивного управления банком в период его пассивной эволюции и выбора оптимальной политики погашения обязательств при неопределенном спросе на депозиты, модели управления ресурсами финансовых институтов в виде задач оптимального управления и т.д. [62 – 70].

Большой информационный материал по управлению портфелем содержится в Интернете [71].

Глава 2.
Задача управления портфелем ценных бумаг в стохастике

§1. Формальная постановка двухкритериальной задачи при управления портфелем в многошаговом случае

В настоящей работе рассматривается двухкритериальная задача об управлении портфелем в динамике с целью максимизации ожидаемого дохода от вложенного капитала в начале и максимизации критерия допустимых потерь в конце процесса. Содержательно постановка аналогична рассмотренной в предшествующей работе, в которой принимал участие автор [17], но в отличие от прежней записи динамика портфеля записывается в переменных – количествах ценных бумагах.

Дальнейшее развитие получает анализ уравнений Беллмана [85]. Предложены вычислительные процедуры прогонки, которые основываются на декомпозиции исходной задачи на случайный процесс и детерминированный.

Часть результатов описанных ниже опубликована в работах автора [86 – 92].

Рассмотрим управление портфелем ценных бумаг на интервале времени $[0,T]$, где индекс $t \in [0,T]$ соответствует номеру торговой сессии.

Будем считать, что в период времени $[-p,T]$, $p \geq 0$ на рынке представлены N видов бумаг.

Каждой бумаге i в день t будем сопоставлять значение цены $c_{t,i}$. Величины $c_{t,i}$ принимают дискретные значения в промежутке $[0,c_{\max}]$ с шагом Δ_c. Вектор цен в день t будем обозначать c_t.

За рассматриваемый в модели период времени часть находящихся в обороте ценных бумаг может погашаться, может происходить размещение новых выпусков. Из соображений формализации будет удобным считать, что в любой момент времени $t \in [-p,T]$ участнику рынка доступны все N видов бумаг. При этом, если некоторая бумага i впервые появилась на вторичных торгах в сессию

t, то определим ее цену для всех сессий $t' < t$ (предшествующих t), как $c_{t',i} = 0$; если t – последняя из торговых сессий, предшествующих погашению бумаги i, то для всех $t' > t$ положим $c_{t',i} = 0$.

Будем считать, что бумаги i могут быть в день t проданы или куплены по цене $c_{t,i}$. (Как правило, цену последней сделки можно с удовлетворительной точностью реализовать на практике, что важно для адекватности рассматриваемой модели действительности.)

Текущее состояние находящегося в управлении портфеля ценных бумаг будем моделировать вектором $(h_{t,1}, h_{t,2}, \ldots, h_{t,N})$, где $h_{t,i}$ – количество бумаг i – го вида в портфеле в момент времени t. Обозначим $S_{t,i}$ – стоимость входящих в портфель бумаг i – го вида в момент времени t: $S_{t,i} = c_{t,i} h_{t,i}$.

Будем считать, что любая денежная сумма может быть целиком конвертирована в облигации произвольного вида i без остатка и величины $h_{t,i}$ могут принимать произвольные дробные значения. На практике при операциях с облигациями в силу их дискретности, как правило, возникают денежные остатки. Это приводит к тому, что доходность операций оказывается несколько ниже, чем она была бы в непрерывном случае. Однако при достаточно крупных объемах вложенного капитала влияние “неработающих” остатков на общий доход столь невелико, что им можно пренебречь без особого ущерба для результатов.

Для произвольной сессии t обозначим через $h^-_{t,i}$ количество (по цене $c_{t,i}$) бумаг вида i, находящихся в портфеле до операций купли-продажи, а через $h^+_{t,i}$ – стоимость бумаг этого вида в портфеле, после указанных операций. Отметим, что $h^-_{t,i} \geq 0, h^+_{t,i} \geq 0$ и $h^+_{t,i} = h^-_{t+1,i}$.

При операциях с ценными бумагами инвестор выплачивает бирже комиссионные сборы. Комиссия взимается с каждого акта, будь то продажа или покупка. Мы будем рассматривать несколько типов поведения инвестора в расчетах с биржей.

Основная задача, случай ***G.***

Если инвестор в день t проводит операции с некоторым видом бумаг i, то с данным видом бумаг это только одна операция: либо продажа (части) бумаг i, либо покупка (дополнительная) бумаг вида i.

В этом случае динамика изменения количества бумаг в портфеле (из h_t^- в h_t^+) удовлетворяют соотношению

$$(c_t h_t^+) = (c_t, h_t^-) - \sum_{i=1}^{N} (k \left| c_{t,i} h_{t,i}^- - c_{t,i} h_{t,i}^+ \right|) .$$

Вспомогательная задача, случай ***E***

В начале сессии инвестор продает все бумаги и на полученный капитал закупает в конце сессии новый набор облигаций.

В этом случае динамика портфеля описывается соотношением

$$(c_t h_t^+) = (c_t, h_t^-) - \sum_{i=1}^{N} (k c_{t,i} h_{t,i}^-) - \sum_{i=1}^{N} (k c_{t,i} h_{t,i}^+) .$$

Вспомогательная задача, случай ***O***

Инвестор не выплачивает комиссию.

В этом случае динамика портфеля описывается соотношением

$$(c_t h_t^+) = (c_t, h_t^-) .$$

Через S_t^-, S_t^+ обозначим стоимость портфеля до и после управления в день t, соответственно

$$S_t^- = \sum_{i=1}^{N} S_{t,i}^- , \; S_t^+ = \sum_{i=1}^{N} S_{t,i}^+ .$$

Целью управления будет максимизация за период $[0,T]$ дохода S_T^- от вложенного в ценные бумаги в первый день управления капитала и минимизация риска.

Изменение цен от сессии к сессии будем описывать в виде марковского процесса с дискретным временем и глубиной p, т.е. вектор цен в день t – это случайный вектор c_t с распределением

$$F(c_t) = F_t(c_t \,|\, C_{t-1}, C_{t-2,\ldots,} C_{t-p}),\ t = 0,1,2,\ldots T.$$

В дальнейшем управление в день t в рассматриваемой модели отождествим с выбором h_t^+.

Набор таких функций $H^+ = \{h_t^+(\cdot)\}_{t=0}^T$ назовем стратегией управления, а множество подобных стратегий обозначим Γ. Любая стратегия $H^+ \in \Gamma$ и матрица $A_1 = (c_t)_{t=-p}^0$ полностью определяют вероятностное распределение на траекториях

$$(h_0^+, c_1, h_1^-, h_1^+, c_2, \ldots, c_{T-1}, h_{T-1}^-, h_{T-1}^+, c_T),$$

которое индуцирует распределение S_T^- как случайной величины.

Рассмотрим для этой операции инвестора два критерия: критерий, описывающий ожидаемый результат, и критерий, описывающий риск операции.

*Критерий **математическое ожидание***

Ставится задача максимизировать математическое ожидание трансформации S_T^- в классе стратегий Γ:

$$M(S_T^+) \to \max,$$

или $\max\limits_{h_0^+, h_1^+, \ldots, h_{T-1}^+} M_{c_1, c_2, \ldots, c_T}(c_T, h_{T-1}^+)$, при ограничениях на динамику портфеля и некоторых ограничениях на переменные процесса.

Критерий допустимых потерь

Как отмечается в [10, 93], в последнее время в задачах управления портфелем все большую популярность приобретает критерий VaR (Value at Risk), отражающий вероятность превышения (или недостижения) заданного уровня некоторым избранным показателем качества управления и состояния процесса.

Определим в нашем случае при каждой заданной стратегии управления H^+ этот критерий в виде

$$W_2 = P_{F(c_t)}((c_T, h_T) \geq K),\ t = 0,1,\ldots,T,$$

где $F(c_t)$ – определенное выше распределение для случайного вектора цен, а K – заданный уровень конечного результата.

Перепишем это определение, используя операцию осреднения и характеристическую функцию:

$$W_2 = M_{c_1, c_2, \ldots, c_T} \chi(H^+, (c_0, h_0)),$$

где характеристическая функция имеет вид

$$\chi_T(H^+, (c_0, h_0)) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad c_T h_T \geq K, \\ 0, & \textit{если} \quad c_T h_T < K. \end{cases}$$

Как следует из приведенной записи, при управлении портфелем инвестору желательно стремиться к увеличению показателя качества W_2.

Парето-оптимальные решения

Введенные таким образом критерии позволяют сформулировать двухкритериальную задачу управления портфелем: (W_1, W_2) при ограничениях, описывающих динамику изменения состояния портфеля, и при управлении в широком классе управлений, как функций от состояния портфеля и процесса изменения цен. Отдельные постановки задач в зависимости от информированности инвестора приводятся ниже.

Как и в общем случае, в данной постановке можно строить отдельные точки паретовского множества введенных критериев, решая задачи

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 \to \max$$

при фиксированных $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Замечания

1. Как следует из определения (W_1, W_2) и свойств операции осреднения, для решения сформулированной задачи

$$\max M_{c_1,\ldots,c_T}(\lambda_1(c_T, h_T) + \lambda_2 \chi_T(H^+, (c_0, h_0))$$

допустимо использование формализма динамического программирования и, следовательно, возможно выписать уравнения Беллмана.

2. В то же время, если в качестве оценки риска принимается дисперсия конечного состояния портфеля по аналогии с классическим случаем задачи Марковица в одношаговом случае, то уравнения Беллмана не приводят к решению задачи, как показывает следующий пример.

Рассмотрим динамический процесс управления ценными бумагами в исходной постановке. Пусть задана некоторая стратегия поведения. Поставим вопрос: можно ли, двигаясь справа налево и отслеживая для состояний системы только дисперсию, просчитать дисперсию результата для всех состояний. Отрицательный ответ следует из примера.

Шаги $t = 1,2,3$; одна бумага в портфеле в единственном числе; состояния $s_{11}, s_{21}, s_{22}, s_{31}, s_{32}$ – первый индекс – шаг, второй индекс нумерует состояния на шаге; управление в каждом состоянии одно, безальтернативное.

После первого шага с равной вероятностью система попадает либо в состояние s_{21}, либо в состояние s_{22}. Из любого из этих состояний на третьем шаге система детерминированно попадает в состояние с тем же вторым индексом.

Цены на бумагу: $c_{11} = 1, c_{21} = c_{31} = a, c_{22} = c_{32} = b$.

Отсюда дисперсия результата (конечного капитала) для состояний s_{21} и s_{22} в силу дальнейшей детерминированности процесса равна нулю.

Результирующий капитал после состояния s_{11} примет с равной вероятностью или значение a, или b. Поэтому дисперсия результата равна

$$0.5*(\frac{a-b}{2})^2 + 0.5*(\frac{b-a}{2})^2 = \frac{(a-b)^2}{4},$$

т.е. является функцией разности $a-b$, что не соответствует предыдущей нулевой оценке.

3. На практике [16] при решении динамических задач используется следующая модификация критерия типа дисперсии:

$$W_2 = M_{c_1,\text{K},c_T}((c_T, h_T) - K)^2.$$

§2. Постановки задач при критерии математического ожидания

Во всем дальнейшем тексте рассматривается однокритериальная задача при критерии математического ожидания.

В зависимости от информированности инвестора и соответственно класса стратегий могут быть сформулированы различные задачи управления процессом трансформации портфеля.

Программные стратегии (функции времени)

а) Если инвестор будет располагать информацией о реализации случайного процесса цен на весь рассматриваемый интервал и выбирать управления в виде h_t^+ как функции времени, т.е. как функции только номера шага, то его наибольший результат запишется в виде:

$$M_{c_1,c_2,\ldots,c_T} \max_{h_0^+,h_1^+,\ldots,h_{T-1}^+} (c_T, h_{T-1}^+) = W_1^+ .$$

б) Если оставаясь в рамках программных стратегий инвестор не будет располагать никакой информацией о реализациях случайного процесса, то его наибольший результат запишется в виде

$$\max_{h_0^+,h_1^+,\ldots,h_{T-1}^+} M_{c_1,c_2,\ldots,c_T} (c_T, h_{T-1}^+) = W_1^- ,$$

и решение задачи фактически сведется к детерминированному случаю.

Стратегии – политики (класс синтезов)

в) Если управление в день t разыскивается в виде функции от истории, т.е.

$$h_t = h_t(c_t, c_{t-1}, \ldots, c_{t-p+1}; h_t^-, h_{t-1}^-, h_{t-1}^+, \ldots, h_2^-, h_2^+, h_1^+),$$
$$t = 1,2,\ldots T-1,$$

что предполагает, что инвестор будет постепенно шаг за шагом получать информацию о ценах, то его наибольший результат запишется в виде

$$\max_{h_0^+} M_{c_1} \max_{h_1^+} M_{c_2} \ldots \max_{h_{T-1}^+} M_{c_T} (c_T h_{T-1}^+) = W_2^- .$$

г) Если инвестор будет располагать информацией на шаг вперед, во всем оставаясь в рамках предыдущей постановки, то его наибольший результат запишется в виде

$$M_{c_1} \max_{h_0^+} M_{c_2} \max_{h_1^+} \ldots M_{c_T} \max_{h_{T-1}^+} (c_T h_{T-1}^+) = W_2^+ .$$

Во всех перечисленных выше постановках учитываются ограничения на динамику портфеля в одной из записей ***G***, ***E***, ***O***.

Теорема 1. *Верны следующие соотношения*: $W_1^- \le W_2^- \le W_2^+ \le W_1^+$.

Доказательство

Данный факт следует из того, что в каждой последующей задаче по сравнению с предыдущей рассматривается более широкий класс управлений, содержащий в себе и управления предшествующей задачи.

Теорема 2. $W_2(O) \ge W_2(G) \ge W_2(E)$.

Доказательство

Этот факт следует из монотонной зависимости конечного дохода от комиссионных изъятий: наибольшее изъятие – в случае ***E***, наименьшее изъятие – в случае ***O***, промежуточное – в случае ***G***.

Все дальнейшее рассмотрение в данной работе относится к случаю в), как наиболее реалистичному случаю, и в смысле получения информации, и в смысле содержания задачи управления портфелем ценных бумаг.

Постановка задачи в модели CALM [16] также относится к данному классу.

§3. Стохастическая задача в классе синтеза без комиссии

Рассмотрим вспомогательную стохастическую задачу без комиссии (случай ***O***) в постановке в). Обращение к этой задаче определяется оценкой по теореме 2 интересующей нас задачи в) в постановке случая ***G*** и простотой выкладок.

Как следует из изложенного выше, в этом случае процесс изменения портфеля имеет вид $(c_t, h_t^+) = (c_t, h_t^-)$, где h_t^+, h_{t-1}^+ – векторы, компоненты которых есть количества облигаций номеров j, $j = 1, 2, \ldots, N$, в портфеле после акта принятия решения на сессиях номеров t, $t-1$ соответственно.

Управление ищем в виде $h_t^+(\cdot) = h_t^+(c_t, h_{t-1}^+)$.

Функционал имеет вид (c_T, h_{T-1}^{+}).

Оптимальная задача в этом случае, в силу Марковости процесса цен и типа ограничений, будет иметь вид

$$\max_{\substack{h_0^+: \\ (c_0, h_0^+)=S_0}} M_{c_1}\left(\max_{\substack{h_1^+: \\ (c_1, h_1^+)= \\ =(c_1, h_0^+)}} M_{c_2}\left(\text{K} \right.\right.$$

$$\left.\left.\text{K}\left(\max_{\substack{h_{T-2}^+: \\ (c_{T-2}, h_{T-2}^+)= \\ =(c_{T-2}, h_{T-3}^+)}} M_{c_{T-1}}\left(\max_{\substack{h_{T-1}^+: \\ (c_{T-1}, h_{T-1}^+)= \\ =(c_{T-1}, h_{T-2}^+)}} M_{c_T}\left(c_T, h_{T-1}^+\right)\right)\right)\right)\right).$$

Определим $W_T(c_T, h_{T-1}^+) = (Mc_T, h_{T-1}^+)$ и выпишем последовательно для этой задачи уравнения Беллмана [86].

Шаг 1. При выборе h_{T-1}^+ на сессии $T-1$ для каждой пары c_{T-1}, h_{T-2}^+ решаем задачу линейного программирования

$$W_{T-1}(c_{T-1}, h_{T-2}^+) = \max_{h_{T-1}^+} M_{c_T}(c_T, h_{T-1}^+),$$

при ограничении $(c_{T-1}, h_{T-1}^+) = (c_{T-1}, h_{T-2}^-)$.

Решение данной задачи находится в одной из вершин, найдем некоторую j_{T-1}-ю:

$$c_{T-1, j_{T-1}} h_{T-1, j_{T-1}}^+ = (c_{T-1}, h_{T-2}^+) \Rightarrow h_{T-1, j_{T-1}}^+ = \frac{(c_{T-1}, h_{T-2}^+)}{c_{T-1, j_{T-1}}}.$$

Подставим это соотношение в функционал рассматриваемой на этом шаге задачи и получим выражение для оценки оптимального значения функционала общей задачи, если процесс начинается с точки h^+_{T-2} при цене c_{T-1}:

$$W_{T-1}(c_{T-1}, h^+_{T-2}) = \max_{j_{T-1}} M_{c_{T,j_{T-1}}}\left(c_{T,j_{T-1}} \frac{(c_{T-1}, h^+_{T-2})}{c_{T-1,j_{T-1}}} \right) =$$

$$= \left(\left(\max_{j_{T-1}} \frac{Mc_{T,j_{T-1}}}{c_{T-1,j_{T-1}}} \right) c_{T-1}, h^+_{T-2} \right).$$

Наряду с этой прямой задачей линейного программирования рассмотрим двойственную ей задачу. Она имеет вид

$$\min_{\varphi_{T-1}} \left((c_{T-1}, h^+_{T-2}) \varphi_{T-1} \right)$$

при условии $\varphi_{T-1} c_{T-1} \geq Mc_T$, где φ_{T-1} – двойственная скалярная переменная.

Отсюда следует, что решение двойственной задачи достигается при $\varphi_{T-1} = \max\limits_{j_{T-1}} \dfrac{Mc_{T,j_{T-1}}}{c_{T-1,j_{T-1}}}$.

В силу определения процесса изменения цен видно, что двойственная переменная φ_{T-1} зависит только от c_{T-1}, т.е. $\varphi_{T-1} = \varphi_{T-1}(c_{T-1})$.

Шаг 2. Теперь на сессии $T-2$, для каждой пары c_{T-2}, h^+_{T-3} мы решаем задачу

$$W_{T-2}(c_{T-2}, h^+_{T-3}) = \max_{h^+_{T-2}} MW_{T-1}(c_{T-1}, h^+_{T-2})$$

при ограничении $(c_{T-2}, h^+_{T-2}) = (c_{T-2}, h^-_{T-3})$.

В силу предшествующего замечания относительно φ_{T-1} эта задача также есть задача линейного программирования:

$$\max_{h^+_{T-2}} M_{c_{T-1}} \left(\left(\max_{j_{T-1}} \frac{Mc_{T,j_{T-1}}}{c_{T-1,j_{T-1}}} \right) c_{T-1}, h^+_{T-2} \right) =$$
$$= \max_{h^+_{T-2}} M_{c_{T-1}} \left(\varphi_{T-1}(c_{T-1}) c_{T-1}, h^+_{T-2} \right)$$

при ограничении $(c_{T-2}, h^+_{T-2}) = (c_{T-2}, h^-_{T-3})$.

Вершина j_{T-2}, где достигается решение этой задачи, находится из соотношения

$$c_{T-2,j_{T-2}} h^+_{T-2,j_{T-2}} = (c_{T-2}, h^+_{T-3}) \Rightarrow h^+_{T-2,j_{T-2}} = \frac{(c_{T-2}, h^+_{T-3})}{c_{T-2,j_{T-2}}}.$$

Оптимальное значение оценки функционала общей задачи для состояния c_{T-2}, h^+_{T-3} запишется в виде

$$W_{T-2}(c_{T-2}, h^+_{T-3}) = \left(\left(\max_{j_{T-2}} \frac{M_{c_{T-1}} \left(\left(\max_{j_{T-1}} \frac{Mc_{T,j_{T-1}}}{c_{T-1,j_{T-1}}} \right) c_{T-1} \right)}{c_{T-2,j_{T-2}}} \right) c_{T-2}, h^+_{T-3} \right).$$

Выпишем здесь двойственную задачу

$$\min_{\varphi_{T-2}} \left((c_{T-2}, h^+_{T-3}) \varphi_{T-2} \right)$$

при условии $\varphi_{T-2} c_{T-2} \geq M_{c_{T-1}} \left(\varphi_{T-1}(c_{T-1}) c_{T-1} \right)$.

Решение этой задачи имеет вид

$$\varphi_{T-2} = \max_{j_{T-2}} \frac{M\left(\varphi_{T-1}(c_{T-1}) c_{T-1, j_{T-2}} \right)}{c_{T-2, j_{T-2}}}.$$

Заметим, что $\varphi_{T-2} = \varphi_{T-2}(c_{T-2})$.

Шаг 3. Теперь на сессии $T-3$ для каждой пары c_{T-3}, h^+_{T-4} решаем задачу

$$W_{T-3}(c_{T-3}, h^+_{T-4}) = \max_{h^+_{T-3}} M W_{T-2}(c_{T-1}, h^+_{T-2})$$

при ограничении $(c_{T-3}, h^+_{T-3}) = (c_{T-3}, h^-_{T-4})$.

В силу предшествующего замечания относительно φ_{T-2} это также задача линейного программирования

$$W_{T-3}(c_{T-3}, h^+_{T-4}) = \max_{h^+_{T-3}} M_{c_{T-2}} \left(\varphi_{T-2}(c_{T-2}) c_{T-2}, h^+_{T-3} \right)$$

при ограничении $(c_{T-3}, h^+_{T-3}) = (c_{T-3}, h^-_{T-4})$.

Вершина j_{T-3} находится из соотношения

$$c_{T-3, j_{T-3}} h^+_{T-3, j_{T-3}} = (c_{T-3}, h^+_{T-4}) \Rightarrow h^+_{T-3, j_{T-3}} = \frac{(c_{T-3}, h^+_{T-4})}{c_{T-3, j_{T-3}}}.$$

Оптимальное значение оценки конечного функционала задачи запишется в виде

$$W_{T-3}(c_{T-3}, h^{+}_{T-4}) =$$

$$= \left(\left(\max_{j_{T-3}} \frac{M_{c_{T-2}} \left(\left(\max_{j_{T-2}} \frac{M_{c_{T-1}} \left(\left(\max \frac{Mc_{T,j}}{c_{T-1,j}} \right) c_{T-1} \right)}{c_{T-2,j_{T-2}}} \right) c_{T-2} \right)}{c_{T-3,j_{T-3}}} \right) c_{T-3}, h^{+}_{T-4} \right).$$

Решение двойственной к этой задачи будет: $\varphi_{T-3}(c_{T-3}) = \max\limits_{j_{T-3}} \dfrac{M\left(\varphi_{T-2}(c_{T-2}) c_{T-2,j_{T-3}}\right)}{c_{T-3,j_{T-3}}}$.

Рекуррентные соотношения для коэффициентов в функционалах прямых задач или оптимальные значения двойственных переменных запишутся так:

$$\varphi_{T-1}(c_{T-1}) = \max_{j_{T-1}} \frac{Mc_{T,j_{T-1}}}{c_{T-1,j_{T-1}}}$$

$$\varphi_{T-2}(c_{T-2}) = \max_{j_{T-2}} \frac{\left(M\varphi_{T-1}(c_{T-1}) c_{T-1,j_{T-2}}\right)}{c_{T-2,j_{T-2}}}$$

$$\varphi_{T-3}(c_{T-3}) = \max_{j_{T-3}} \frac{\left(M\varphi_{T-2}(c_{T-2}) c_{T-2,j_{T-3}}\right)}{c_{T-3,j_{T-3}}}$$

$$\varphi_t(c_t) = \max_{j_t} \frac{\left(M\varphi_{t+1}(c_{t+1})c_{t+1,j_t}\right)}{c_{t,j_t}}.$$

Шаг Т. На сесии 0 решаем задачу

$$\max_{h_0^+} M_{c_1}\left(\varphi_1(c_1)c_1, h_0^+\right) = \max_{j_0} M_{c_1}\left(\varphi_1(c_1)c_1, \frac{S_0}{c_{0,j_0}}\right) =$$

$$= S_0 \max_{j_0} \frac{M\left(\varphi_1(c_1)c_{1,j_0}\right)}{c_{0,j_0}}, \text{ где } \varphi_1(c_1) = \max_{j_1} \frac{M\left(\varphi_2(c_2)c_{2,j_1}\right)}{c_{1,j_1}},$$

$c_{0,j_0}h^+_{0,j_0} = S_0$, $h^+_{0,j_0} = \dfrac{S_0}{c_{0,j_0}}$, и S_0 – начальное значение капитала.

Теорема 3. $W_2(E) = \left(\dfrac{1-k}{1+k}\right)^T W_2(O)$.

Доказательство

Утверждение следует непосредственно из уравнений Беллмана в случаях ***E*** и ***O***, поскольку в случае ***O*** ограничения имеет вид $(c_T, h_T^+) = (c_T, h_T^-)$, а в случае ***E*** – имеет вид $(c_T, h_T^+) = \left(\dfrac{1-k}{1+k}c_T, h_T^-\right)$.

Также из приведенных выше соотношений следует справедливость утверждения.

Теорема 4. *Локально-оптимальная задача, т.е. случай, когда на каждом шаге решается задача оптимизации стоимости портфеля только на шаг вперед, близка к исходной задаче в точной постановке, если все φ_t близки к константам (в тривиальном случае к единице).*

Заметим, что рассматриваемая задача, несмотря на простую запись, содержит в себе все трудности изучаемого нами класса задач управления. Приведем примеры того, что промежуточные цели $W(c_t, h_{t-1}^+)$ могут быть нелинейными функциями, а решение многошаговой задачи не совпадает с серией последовательно решаемых локальных задач с прогнозом на шаг вперед.

Замечание 1. Пример нелинейности промежуточных целей.

Пусть на рынке, на каждой торговой сессии представлены два вида бумаг (бумага 1 и бумага 2). Рассмотрим три последовательные торговые сессии (три шага управления: шаг 1, шаг 2 и шаг 3). Начальный капитал S_1=1. Векторы цен на шаге 1: $\overline{C}_1$(1,1); на шаге 2: $\overline{c}_2$ ($c_{2,1}$,1), где $c_{2,1}$- случайная величина с известным распределением, принимающая значения в интервале [2,4]; на шаге 3: $\overline{c}_3$ ($c_{3,1}$,2), где $c_{3,1}=C_{2,1}$, т.е. реализация случайной величины $c_{2,1}$ на шаге 1. Критерий управления таков, как и для общей задачи: $M(\overline{c}_3, \overline{h}_2^+)$, в нашем случае $M(c_{3,1}h_{2,1}^+ + 2h_{2,2}^+)$. Комиссия (плата за каждый шаг) полагается равной нулю, следовательно, на шаге $i \in 1{,}2$: $(\overline{C}_i, \overline{h}_i^-) = (\overline{C}_i, \overline{h}_i^+)$, а так как $\overline{h}_i^- = \overline{h}_{i+1}^+$, то $(C_i, h_i^+) = (C_i, h_{i+1}^+)$. Найти управления $\overline{h}_1^+$, $\overline{h}_2^+$, доставляющие максимум критерию, т.е. $W_0 = \max\limits_{h_{1,1}^+, h_{1,2}^+} M_{\overline{c}_2} \max\limits_{h_{2,1}^+, h_{2,2}^+} M_{c_{3,1}}(c_{3,1}h_{2,1}^+ + 2h_{2,2}^+)$.

Решим задачу последовательно шагом назад, на каждой сессии максимизируя текущие оценки критерия $W(c_t, h_{t-1}^+)$.

Рассмотрим шаг 2.

На шаге 2 цена бумаги 1 (реализация случайной величины $c_{2,1}$) $C_{2,1} \in [2{,}4]$. Вектор $\overline{h}_1^+$ фиксирован и возможные значения определяются из начальных условий. Необходимо найти

$$W_1 = \max_{h_{2,1}^+, h_{2,2}^+}(C_{2,1}h_{2,1}^+ + 2h_{2,2}^+)$$

при ограничительном условии $C_{2,1}h_{1,1}^{+}+C_{2,2}h_{1,2}^{+}=C_{2,1}h_{2,1}^{+}+C_{2,2}h_{2,2}^{+}$.

По условию задачи $C_{2,2}=1$, $C_{1,1}=1$, $C_{1,2}=1$, $S_1=C_{1,1}h_{1,1}^{+}+C_{1,2}h_{1,2}^{+}=1$, отсюда $h_{1,2}^{+}=1-h_{1,1}^{+}$ и ограничительное условие принимает вид $C_{2,1}h_{2,1}^{+}+h_{2,2}^{+}=C_{1,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1$, заметим, что при $C_{2,1}\in[2,4]$ и $h_{1,1}^{+}\in[0,1]$, $C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1>0$.

Максимизируемый критерий и ограничительное условие есть линейные формы, множество ограничений есть выпуклый многогранник. Поэтому на шаге 2 решается классическая задача линейного программирования

$$C_{2,1}h_{2,1}^{+}+2h_{2,2}^{+}\to\max,$$
$$C_{2,1}h_{2,1}^{+}+h_{2,2}^{+}=C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1,\ h_{2,1}^{+},h_{2,2}^{+}\ge 0,\ C_{2,1}\in[2,4],$$
$$h_{1,1}^{+}\in[0,1].$$

Решение задачи находится в вершинах многогранника линейных ограничений, т.е. в нашем случае в одной из двух точек: $(\frac{C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1}{C_{2,1}},0)$ или $(0,C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1)$. Очевидно, что максимум $C_{2,1}h_{2,1}^{+}+2h_{2,2}^{+}$ достигается в точке $(0,C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1)$ и равен $W_2=2(C_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1)$. Это означает, что на шаге 2 весь капитал вкладывается в бумагу 2, вне зависимости от структуры портфеля в начале (до принятия решения) на шаге 2.

Рассмотрим шаг 1.

Необходимо найти

$$W_1=\max_{h_{1,1}^{+},h_{1,2}^{+}}M_{\bar{c}_2}W_2=\max_{h_{1,1}^{+},h_{1,2}^{+}}M_{\bar{c}_2}(2(c_{2,1}h_{1,1}^{+}-h_{1,1}^{+}+1))$$

при условии $h_{1,1}^{+}\in[0,1]$.

Решение задачи находится при $h_{1,1}^{+} = 1$ в точке (1,0) и $W_1 = 2Mc_{2,1}$. Весь капитал на шаге 1 вкладывается в бумагу 1.

Итак, решением всей задачи являются управления $\overline{h}_1^{+}$ (1,0) и $\overline{h}_2^{+}$ (0,1), при которых

$$W_1 = \max_{h_{1,1}^{+}, h_{1,2}^{+}} M_{\bar{c}_2} \max_{h_{2,1}^{+}, h_{2,2}^{+}} M_{c_{3,1}} (c_{3,1} h_{2,1}^{+} + 2h_{2,2}^{+}) = 2Mc_{2,1}.$$

Теперь рассмотрим предложенную выше задачу с одним дополнительным ограничением на управление: $h_{2,1}^{+} < 3$.

Также решим задачу последовательно шагом назад, на каждой сессии максимизировав критерий $W(c_t, h_{t-1}^{+})$.

Шаг 2.

Решим задачу линейного программирования

$$C_{2,1} h_{2,1}^{+} + 2h_{2,2}^{+} \to \max,$$
$$C_{2,1} h_{2,1}^{+} + h_{2,2}^{+} = C_{1,1} h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1,\ h_{2,1}^{+} \ge 0,\ h_{2,2}^{+} \in [0,3],$$
$$C_{2,1} \in [2,4],\ h_{1,1}^{+} \in [0,1].$$

В этом случае при условии $C_{2,1} h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1 < 3$ решение достигается в одной из вершин многогранника ограничений в точке $(0, C_{2,1} h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1)$. При условии, когда $C_{2,1} h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1 \ge 3$, решение достигается в вершине нового многогранника ограничений $(\frac{C_{2,1} h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} - 2}{C_{2,1}}, 3)$, но не в крайней точке первичного многогранника. Это приводит к тому, что текущая оценка критерия имеет две ветви:

$$W = \begin{cases} 2(c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1), & c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1 < 3, \\ c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 4, & c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1 \geq 3. \end{cases}$$

Если изобразить графически в координатах $c_{2,1}$, $h_{1,1}^{+}$ кривую перехода от одной ветви к другой, то эта гипербола $C_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1 = 3$ на интервале $h_{1,1}^{+} \in [0, \frac{2}{3}]$ проходит выше $c_{2,1} = 4$, а при $h_{1,1}^{+} \in [\frac{2}{3}, 1]$ располагается в интервале $[2,4]$.

Отсюда мы получаем, что при $h_{1,1}^{+} \in [0, \frac{2}{3}]$ необходимо решить задачу $\max\limits_{h_{1,1}^{+}} M_1 = M_1^0$, где математическое ожидание $M_1 = \mathop{M}\limits_{c_{11} \in [2,4]} W$, а при $h_{1,1}^{+} \in [\frac{2}{3}, 1]$ необходимо решить задачу $\max\limits_{h_{1,1}^{+}} M_2 = M_2^0$, где математическое ожидание M_2 вычисляется как сумма математических ожиданий на двух отрезках:

$$M_2 = M_{c_{2,1} \in [2,H]}(c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 4) + M_{c_{2,1} \in [H,4]}(2(c_{2,1}h_{1,1}^{+} - h_{1,1}^{+} + 1)).$$

Оптимальное значение критерия определится как $\max[M_1^0, M_2^0]$.

Замечание 2. Пример несовпадения локальной и многошаговой оптимизации

Сессий – три, бумаг – две, комиссии нет. На нулевой сессии цена обеих бумаг 1. Инвестор на нулевой сессии платит единицу и по выбору получает или бумагу 1, или бумагу 2.

На первой сессии два равновероятных варианта цен.

Вариант 1: (4,1).

Вариант 2: (0,1).

На второй сессии цены бумаг зависят от того, какой вариант реализовался на первой сессии.

Если реализовался первый вариант, то цены (0,0).

Если реализовался второй вариант, то цены (4,4).

Критерий – математическое ожидание конечного капитала.

Проведем анализ операции. Если инвестор на первой сессии выбирает бумагу 1, то его ожидаемый капитал после этого шага равен 2. Однако после второго шага он гарантировано разорен. Если игрок выбирает на первом шаге бумагу 2, то после этого шага его капитал равен 1. После второго шага с равной вероятностью его результат равен либо 0, либо 4, т.е. математическое ожидание результата равно 2. Таким образом, локально оптимальным на первом шаге является выбор бумаги 1, а оптимальным – выбор бумаги 2.

Локально оптимальная стратегия является оптимальной, если фазовое состояние системы полностью определяется случайным фактором и не зависит от выбора управлений (от них может зависеть текущий доход). Если "почти"не зависит, то локально оптимальная "почти" оптимальна, т.е. может идти речь о приближенном решении. В рассматриваемом случае это так, если после каждой операции взимается комиссия и затем текущий доход изымается из оборота.

Если фазовое состояние зависит от управления, то "расстояние" между локально оптимальной и оптимальной стратегиями может быть сколь угодно велико, вне зависимости, детерминированный это вариант или случайный.

§4. О разложимости исходного портфеля на элементарные (простые) портфели

Рассмотрим задачу в постановке в) при комиссии в форме $\boldsymbol{G}$ и при критерии математическом ожидании конечного капитала.

Определим портфель как набор из ценных бумаг $h_t = (h_{t,0}, h_{t,1}, \ldots, h_{t,N})$, где $h_{t,i}$ – количество бумаг i-го вида в портфеле в момент времени t. $h_{t,0}$ – количество текущих денежных средств. В каждый момент t будем рассматривать $h_{t,i}^{-}$, $h_{t,i}^{+}$ количество бумаг вида i, находящихся в портфеле до операции купли-продажи и после соответственно.

Пусть $\xi_{t,i}$ – количество купленных бумаг вида i в день t, а $\pi_{t,i}$ – количество проданных бумаг вида i в день t.

$c_{t,i}$ – цены в момент времени t, описываются марковским процессом с глубиной p.

Предполагается, что биржа за каждую операцию с портфелем взимает плату пропорционально объему капитала, задействованного в операции. Коэффициент пропорциональности будем называть комиссией.

Ограничения на количество бумаг:

$h^+_{t,i} = h^-_{t+1,i}$ и $h^-_{t,i} \ge 0$, $h^+_{t,i} \ge 0$,

$h^+_{t,i} = h^-_{t,i} + \xi_{t,i} - \pi_{t,i}$ и $\xi_{t,i} \ge 0$, $\pi_{t,i} \ge 0$.

Ограничения на капитал:

$$\sum_{i=0}^{N} c_{t,i} h^+_{t,i} = \sum_{i=0}^{N} c_{t,i} h^-_{t,i} - k\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\xi_{t,i} - k\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\pi_{t,i};$$

учитывая $h^+_{t,i} = h^-_{t,i} + \xi_{t,i} - \pi_{t,i}$,

получим $(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\xi_{T-1,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\pi_{T-1,i}$.

Заметим, что если каждый вид бумаги i в день t только покупается или только продается т.е. $\xi_{t,i}\pi_{t,i} = 0$, то ограничение на капитал запишется в виде задачи ***G***.

$$(c_t, h^+_t) = (c_t, h^-_t) - \sum_{i=1}^{N} (k\left|c_{t,i}h^-_{t,i} - c_{t,i}h^+_{t,i}\right|).$$

Тогда после операций купли-продажи в момент t, перед новым актом принятия решений в момент $t+1$, оценка капитала имеет вид $\sum_{i=0}^{N} c_{t+1,i} h_{t+1,i}^{-}$.

Под трансформацией капитала понимается переход от $\sum_{i=0}^{N} c_{t,i} h_{t,i}^{-}$ к $\sum_{i=0}^{N} c_{t+1,i} h_{t+1,i}^{-}$, под управлением в день t – м выбор $\xi_{t,i}$, $\pi_{t,i}$ и соответственно h_t^{+} , $t = 0, \mathrm{K}\ , T$.

Определим цель управления портфелем как стремление к максимальному увеличению математического ожидания конечной стоимости портфеля $\sum_{i=0}^{N} c_{T,i} h_{T,i}^{-}$, или, поскольку по условию задачи $h_{t+1}^{-} = h_t^{+}$, к величине $\sum_{i=0}^{N} c_{T,i} h_{T-1,i}^{+}$.

Рассмотрим оптимизационную задачу в постановке в) §2.

$$\max_{h_0^+} M_{c_1} \max_{h_1^+} M_{c_2} \mathrm{K} \max_{h_{T-1}^+} M_{c_T} (c_T h_{T-1}^{+}) = W_2^{-} .$$

Для этого случая справедливы следующие уравнения Беллмана.

При $t = T$ определим оценку $O_T^{*}(c_T, h_T^{-}) = \sum_{i=0}^{N} c_{T,i} h_{T,i}^{-}$.

При $t = T - 1$ определим оптимальную оценку для портфеля h_{T-1}^{-} при ценах c_{T-1}

$$O^*_{T-1}(c_{T-1}, h^-_{T-1}) = \max_{\substack{h^+_{T-1}: \\ h^+_{T-1} = h^-_T}} M_{c_T} O^*_T(c_T, h^-_T) = \max_{h^+_{T-1}} M_{c_T} \sum_{i=0}^{N} c_{T,i} h^+_{T-1,i} =$$

$$= \max_{h^+_{T-1}} \sum_{i=0}^{N} M c_{T,i} h^+_{T-1,i} = \max_{\xi_{T-1}, \pi_{T-1}} \sum_{i=0}^{N} M c_{T,i} (h^-_{T-1,i} + \xi_{T-1,i} - \pi_{T-1,i}),$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\xi_{T-1,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\pi_{T-1,i} ,$$

$$\xi^-_{T-1,i} \ge 0 ,\ \pi_{T-1,i} \ge 0 ,$$

$$h^-_{T-1,i} + \xi_{T-1,i} - \pi_{T-1,i} \ge 0 .$$

При $t = T - 2$ определим оптимальную оценку для портфеля h^-_{T-2} при ценах c_{T-2} :

$$O^*_{T-2}(c_{T-2}, h^-_{T-2}) = \max_{\substack{h^+_{T-2}: \\ h^+_{T-2} = h^-_{T-1}}} M_{c_{T-1}} O^*_{T-1}(c_{T-1}, h^-_{T-1}) ,$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-2,i}\xi_{T-2,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-2,i}\pi_{T-2,i} ,$$

$$\xi^-_{T-2,i} \ge 0 ,\ \pi_{T-2,i} \ge 0 ,$$

$$h^-_{T-2,i} + \xi_{T-2,i} - \pi_{T-2,i} \ge 0 .$$

Соответственно для текущего t определим оптимальную оценку для портфеля h^-_t при ценах c_t :

$$O^*_t(c_t, h^-_t) = \max_{\substack{h^+_t: \\ h^+_t = h^-_{t+1}}} M_{c_{t+1}} O^*_{t+1}(c_{t+1}, h^-_{t+1}) ,$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\xi_{t,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\pi_{t,i} ,$$

$$\xi^-_{t,i} \ge 0 ,\ \pi_{t,i} \ge 0 ,$$

$h^-_{t,i} + \xi_{t,i} - \pi_{t,i} \ge 0$.

Указанные соотношения прямо следует из определения и постановки задачи, реализуя принцип оптимальности Беллмана. Теперь для данного процесса установим справедливость принципа разложения

Оптимальная оценка суммарного портфеля равна сумме оптимальных оценок слагаемых портфелей.

Действительно, проведем рассуждения по индукции, двигаясь справа налево.

1. При $t = T$ справедливость разложения следует из свойств линейной формы - скалярного произведения.

2. При $t = T-1$ рассмотрим три портфеля h^-_{T-1}, $\hat{h}^-_{T-1}$, $\hat{\hat{h}}^-_{T-1}$, таких что $h^-_{T-1} = \hat{h}^-_{T-1} + \hat{\hat{h}}^-_{T-1}$, и установим соответствие между оптимальными оценками этих портфелей.

$$O^*_{T-1}(c_{T-1}, h^-_{T-1}) = \max_{\xi_{T-1}, \pi_{T-1}} \sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(h^-_{T-1,i} + \xi_{T-1,i} - \pi_{T-1,i}) ,$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\xi_{T-1,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\pi_{T-1,i} ,$$

$$\xi^-_{T-1,i} \ge 0 , \ \pi_{T-1,i} \ge 0 ,$$

$$h^-_{T-1,i} + \xi_{T-1,i} - \pi_{T-1,i} \ge 0 .$$

$$O^*_{T-1}(c_{T-1}, \hat{h}^-_{T-1}) = \max_{\xi_{T-1}, \pi_{T-1}} \sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(\hat{h}^-_{T-1,i} + \hat{\xi}_{T-1,i} - \hat{\pi}_{T-1,i}) ,$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\hat{\xi}_{T-1,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\hat{\pi}_{T-1,i} ,$$

$$\hat{\xi}^-_{T-1,i} \ge 0 , \ \hat{\pi}_{T-1,i} \ge 0 ,$$

$$\hat{h}^-_{T-1,i} + \hat{\xi}_{T-1,i} - \hat{\pi}_{T-1,i} \ge 0 .$$

$$O^*_{T-1}(c_{T-1}, \hat{\hat{h}}^-_{T-1}) = \max_{\xi_{T-1}, \pi_{T-1}} \sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(\hat{\hat{h}}^-_{T-1,i} + \hat{\hat{\xi}}_{T-1,i} - \hat{\hat{\pi}}_{T-1,i}) \, ,$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\hat{\hat{\xi}}_{T-1,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{T-1,i}\hat{\hat{\pi}}_{T-1,i} \, ,$$

$$\hat{\hat{\xi}}^-_{T-1,i} \geq 0 \, , \ \hat{\hat{\pi}}_{T-1,i} \geq 0 \, ,$$

$$\hat{\hat{h}}^-_{T-1,i} + \hat{\hat{\xi}}_{T-1,i} - \hat{\hat{\pi}}_{T-1,i} \geq 0 \, .$$

Как следует из линейности оптимизируемой функции в приведенных выше записях, она может быть представлена в виде суммы

$$\sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(h^-_{T-1,i} + \xi_{T-1,i} - \pi_{T-1,i}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(\hat{h}^-_{T-1,i} + \hat{\xi}_{T-1,i} - \hat{\pi}_{T-1,i}) + \sum_{i=0}^{N} Mc_{T,i}(\hat{\hat{h}}^-_{T-1,i} + \hat{\hat{\xi}}_{T-1,i} - \hat{\hat{\pi}}_{T-1,i}),$$

так как

$$h^-_{T-1,i} = \hat{h}^-_{T-1,i} + \hat{\hat{h}}^-_{T-1,i} \, ,$$

$$\xi_{T-1,i} = \hat{\xi}_{T-1,i} + \hat{\hat{\xi}}_{T-1,i} \, ,$$

$$\pi_{T-1,i} = \hat{\pi}_{T-1,i} + \hat{\hat{\pi}}_{T-1,i} \, ,$$

и, следовательно, общая оптимальная задача раскладывается на сумму двух задач, так что:

$$O^*_{T-1}(c_{T-1}, h^-_{T-1}) = O^*_{T-1}(c_{T-1}, \hat{h}^-_{T-1}) + O^*_{T-1}(c_{T-1}, \hat{\hat{h}}^-_{T-1}) \, .$$

3. Рассмотрим теперь текущий шаг t и соответственно три задачи на этом шаге:

$$O_t^*(c_t, h_t^-) = \max_{\substack{h_t^+:\\ h_t^+ = h_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-),$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\xi_{t,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\pi_{t,i},$$

$$\xi_{t,i}^- \ge 0,\ \pi_{t,i} \ge 0,$$

$$h_{t,i}^- + \xi_{t,i} - \pi_{t,i} \ge 0.$$

$$O_t^*(c_t, \hat{h}_t^-) = \max_{\substack{h_t^+:\\ h_t^+ = h_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{h}_{t+1}^-),$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\hat{\xi}_{t,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\hat{\pi}_{t,i},$$

$$\hat{\xi}_{t,i}^- \ge 0,\ \hat{\pi}_{t,i} \ge 0,$$

$$\hat{h}_{t,i}^- + \hat{\xi}_{t,i} - \hat{\pi}_{t,i} \ge 0.$$

$$O_t^*(c_t, \hat{\hat{h}}_t^-) = \max_{\substack{h_t^+:\\ h_t^+ = h_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{\hat{h}}_{t+1}^-),$$

$$(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\hat{\hat{\xi}}_{t,i} = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}\hat{\hat{\pi}}_{t,i},$$

$$\hat{\hat{\xi}}_{t,i}^- \ge 0,\ \hat{\hat{\pi}}_{t,i} \ge 0,$$

$$\hat{\hat{h}}_{t,i}^- + \hat{\hat{\xi}}_{t,i} - \hat{\hat{\pi}}_{t,i} \ge 0.$$

Если для момента $t+1$ справедливо $O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-) = O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{h}_{t+1}^-) + O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{\hat{h}}_{t+1}^-)$ для любых разложений $h_{t+1}^- = \hat{h}_{t+1}^- + \hat{\hat{h}}_{t+1}^-$, то тогда для задачи (5) можно записать следующие эквивалентные преобразования:

$$O_t^*(c_t, h_t^-) = \max_{\substack{h_t^+: \\ h_t^+ = h_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-) =$$

$$= \max_{\substack{\hat{h}_t^+, \hat{\hat{h}}_t^+: \\ \hat{h}_t^+ = \hat{h}_{t+1}^-, \\ \hat{\hat{h}}_t^+ = \hat{\hat{h}}_{t+1}^-}} (M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{h}_{t+1}^-) + M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{\hat{h}}_{t+1}^-)) =$$

$$= \max_{\substack{\hat{h}_t^+: \\ \hat{h}_t^+ = \hat{h}_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{h}_{t+1}^-) + \max_{\substack{\hat{\hat{h}}_t^+: \\ \hat{\hat{h}}_t^+ = \hat{\hat{h}}_{t+1}^-}} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, \hat{\hat{h}}_{t+1}^-) =$$

$$= O_t^*(c_t, \hat{h}_t^-) + O_t^*(c_t \hat{\hat{h}}_t^-),$$

так как $(1+k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}(\hat{\xi}_{t,i} + \hat{\hat{\xi}}_{t,i}) = (1-k)\sum_{i=0}^{N} c_{t,i}(\hat{\pi}_{t,i} + \hat{\hat{\pi}}_{t,i})$ и

$\hat{h}_{t,i}^- \geq 0$, $\hat{\hat{h}}_{t,i}^- \geq 0$, $\hat{\xi}_{t,i} \geq 0$, $\hat{\hat{\xi}}_{t,i} \geq 0$, $\hat{\pi}_{t,i} \geq 0$, $\hat{\hat{\pi}}_{t,i} \geq 0$,

$\hat{h}_{t,i}^- + \hat{\hat{h}}_{t,i}^- + \hat{\xi}_{t,i} + \hat{\hat{\xi}}_{t,i} - \hat{\pi}_{t,i} - \hat{\hat{\pi}}_{t,i} \geq 0$.

Следствие. (Вытекает из доказанного Принципа Разложения.) Для любого портфеля $h_t^- = (h_{t,0}^-, h_{t,1}^-, \mathrm{K}\ , h_{t,N}^-)$ допустимо разложение на простые (элементарные) портфели, т.е.

$$O_t^*(c_t, h_t^-) = \sum_{i+1}^{N} O_t^*(c_t, h^-{}_t(i)) h_{t,i}^-,$$

где $h_t^-(i)$ - простой портфель состоящий только из одной бумаги вида i, т.е. $h_{t,i}^-(i) = 1$,. $h_{t,j}^-(i) = 0$, $\forall j \in [0, N] \neq i$.

Теорема 5. *Если* h_t^- *– простой портфель, то оптимальное поведение на шаге* t *реализуется путем перехода в простой портфель на шаге* $t+1$.

Доказательство. (Непосредственно следует из предыдущего утверждения.) Рассмотрим уравнение Беллмана на шаге t. Пусть

$h_t^-(r)$ – простое состояние. Тогда задача оптимизации записывается в виде

$$O_t^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-) = \max_{h_t^+} \sum_{i=0}^{N} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1,i} h_{t+1,i}^-(i)) h_{t,i}^+ =$$

$$= \max_{h_t^+} \sum_{i \neq r} M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-(i)) \xi_{t,i} - M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-(r)) \pi_{t,r} +$$

$$+ M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-(r)) h_{t,r}^-,$$

при ограничениях $(1+k)\sum_{i \neq r} c_{t,i}\xi_{t,i} = (1-k)\sum_{i \neq r} c_{t,i}\pi_{t,i}$, $\xi_{t,i}\pi_{t,i} \geq 0$, $h_{t,i}^- + \xi_{t,i} - \pi_{t,i} \geq 0$.

Решение реализуется в одной из вершин многогранника ограничений:

1) если $\pi_{t,r} = 0$, то $\xi_{t,r} = 0$;

2) если $\pi_{t,r} = h_{t,r}^-$, то вершина определяется из условий $\xi_{t,r} = \frac{1-k}{1+k} \frac{c_{t,r}}{c_{t,i}} h_{t,r}^-$.

Оптимальная оценка в этом случае определяется в виде

$$\max[M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-(r)); \max_{i \neq r} \frac{1-k}{1+k} \frac{M_{c_{t+1}} O_{t+1}^*(c_{t+1}, h_{t+1}^-(i))}{c_{t,i}} c_{t,r}] * h_{t,r}^-,$$

т.е. путем перехода в одно из простых состояний на $t+1$ шаге.

Теорема 6. *Поскольку стартовое положение портфеля простое* $h_0^- = (S_0, 0, \ldots, 0)$, *то оптимальная стратегия в полной задаче реализуется в последовательном переходе из простого состояния в простое.*

§5. Две принципиальные схемы метода размытых целей

Опираясь на формулировки соотношений для коэффициентов $\varphi_t(c_t)$, опишем две принципиальные схемы алгоритмов для вычисления приближенных стратегий в постановке задачи в) при ограничениях $\boldsymbol{O}$ и критерии математическом ожидании конечного капитала

$$\max_{h_0^+} M_{c_1} \max_{h_1^+} M_{c_2} \ldots \max_{h_{T-1}^+} M_{c_T} (c_T h_{T-1}^+) = W_2^-$$

в рамках применения одного из классических подходов: метода последовательных приближений [94]. Данный метод предполагает выбор на первом шаге рационального приближения к искомой стратегии и последующего последовательного улучшения стратегий (политик). С вычислительной точки зрения очень важно правильно выбрать начальное приближение. Выбор первого промежуточного критерия в виде (Mc_{t+1}, h_t^+) «хорош» своей непосредственностью: улучшать ожидаемую стоимость портфеля на следующем шаге, не отягощаясь прогнозом на последующие шаги. Видимо, это вполне естественно выглядит, если рассмотреть управление бесконечношаговым процессом.

Далее используются те же самые исходные посылки: процесс изменения портфеля описывается $(c_t h_t^+) = (c_t, h_{t-1}^+)$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, заданы все функции распределения для цен c_t, задан критерий (c_T, h_{T-1}^+). Управление в виде политик выбирается в пространстве синтезов: $h_t^+(\cdot) = h_t^+(c_t, h_{t-1}^+)$.

Метод улучшения размытых целей при движении слева – направо

Идея принципиального алгоритма состоит в том, чтобы построить последовательность улучшений промежуточных критериев, которые образуются путем “размытия” первого приближенного критерия.

Траекторию изменения портфеля будем выбирать, принимая в качестве правила выбора управления (политики) решение на каждом шаге задачи.

Найти

$$\sum_{i=1}^{N}(\alpha_{t,i}Mc_{t+1,i}, h_{t,i}^{+}) \to \max$$

при ограничении $(c_t h_t^{+}) = (c_t, h_{t-1}^{+})$, $t = 0,1,\ldots,T-1$,

где весовые коэффициенты $\alpha_{t,i}$ характеризуют «размытость» тех простых политик, которые следуют из решения задач:

для каждого i найти

$$\max(Mc_{t+1,i}, h_{t,i}^{+})$$

при ограничении $(c_t h_t^{+}) = (c_t, h_{t-1}^{+})$, $t = 0,1,\ldots,T-1$.

Шаг 1. Построим процесс трансформации портфеля, исходя из правила выбора синтеза путем решения задачи

$$\sum_{i=1}^{N}(Mc_{t+1,i}, h_{t,i}^{+}) \to \max,$$

при ограничении $(c_t h_t^{+}) = (c_t, h_{t-1}^{+})$, $t = 0,1,\ldots,T-1$.

Это будет начальным состоянием (положением) в процессе улучшения политик для данного класса управлений, - данная задача соответствует случаю $\alpha_{t,i} = \dfrac{1}{N}$.

Шаг 2. Рассчитаем, двигаясь слева направо, $(Mc_T, {h_{T-1}^{+}}^{0}) = S_T^0$.

Шаг 3. Варьируем $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_T^0$, т.е. от одного набора коэффициентов «размытия» $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_T^0$ переходим к другому набору.

Процедуры «размытия», т.е. выбора различных наборов весовых коэффициентов $\{\alpha_t^0\}$,могут быть разными.

Если варьируется только α_t^0, при фиксированных остальных значениях $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_{t-1}^0, \alpha_{t+1}^0, \ldots, \alpha_T^0$ будем говорить о локальном варьировании (размытии) промежуточных целей.

Если варьируются все компоненты набора векторов $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_T^0$, то будем говорить о полном многошаговом изменении (размытии) весовых коэффициентов.

Шаг 4. При новом наборе коэффициентов $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_T^1$ вычисляем $(Mc_T, h_{T-1}^{+\,1}) = S_T^1$, решая последовательно $t = 0,1,\ldots,T-1$ задачи:

Найти

$$\sum_{i=1}^{N} (\alpha_{t,i} Mc_{t+1,i}, h_{t,i}^{+}) \to \max,$$

при ограничении $(c_t h_t^{+}) = (c_t, h_{t-1}^{+})$.

Шаг 5. По изменению критерия S_T^1 определяем направление изменения $\{\alpha_t^0\}$, формируем новый «размытый» образ системы целей $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_T^0$, и переходим к шагу 3. Если изменений критерия задачи не последовало, переходим к шагу 6.

Шаг 6. Изменяется либо начальное состояние, либо принцип выбора весовых коэффициентов на шаге 5 (после чего переход на шаг 3), либо процесс вычислений завершается.

Метод улучшения размытых целей при движении справа – налево

Как видно из формул определения в §3, коэффициенты $\varphi_t(c_t)$ зависят только от текущих значений случайных параметров. Если бы мы располагали возможностью вычисления вероятностей дискретных значений $c_{t,i}$ в виде матрицы ρ размерности

$N \times T \times (\frac{C_{\max}}{\Delta_c})$, то затем расчетом справа – налево по этим формулам мы могли бы рассчитать весь массив необходимых значений $\varphi_t(c_t)$ и затем, двигаясь слева – направо, рассчитать оптимальную политику. Однако в силу большой размерности этого массива и сложной зависимости цен данная перспектива представляется мало возможной.

В излагаемом здесь методе предлагается «огрубить» вероятностный процесс до размеров, доступных для вычислений и, осуществляя описанные выше действия, постепенно улучшать качество правил управления (политики) в смысле критерия исходной задачи. Приближенное представление процесса изменения цен можно осуществить либо путем аппроксимации функций распределения цен, либо ограничиваясь несколькими значениями цен.

В одной из возможных редакций принципиальная схема алгоритма выглядит следующим образом

Шаг 1. Сформируем приближенное представление о случайном процессе ρ_0, которое позволит (в смысле вычислительных возможностей ЭВМ) провести расчеты, двигаясь справа – налево, и рассчитаем массив $\varphi_t(c_t)$.

Шаг 2.Рассчитаем трансформацию портфеля, двигаясь слева – направо, используя на каждом шаге выбор правил управления путем решения задачи:

Найти

$$\max(M\varphi_{t+1}(c_{t+1})c_{t+1}, h_t^+)$$

при ограничении $(c_t h_t^+) = (c_t, h_{t-1}^+)$, $t = 0,1,\ldots, T-1$.

Шаг 3. Вычислим значение критерия задачи S_T^+: конечную стоимость портфеля (Mc_T, h_{T-1}^+).

Шаг 4. Если значение критерия не улучшилось, процедура расчетов завершается, иначе формируем новую матрицу ρ_1, оценивая результаты шага 3, и возвращаемся на шаг 2.

Практические расчеты

При практическом решении задач оптимального управления в стохастической постановке существует два крайних направления действий:

– при простой политике управления улучшать качество представлений о стохастическом процессе изменения цен,

– при простом (и не очень точном) описании стохастического процесса улучшать, насколько это возможно, качество управления.

Принципы аппроксимации и последовательного приближения в классе стохастических задач предоставляют широкое поле для маневра и выбора конкретного метода в конкретной задаче.

В работе [17] описан опыт в расчетах по управлению портфелем на рынке Государственных Краткосрочных Облигаций РФ (1994 – 1997 гг.) на вторичном рынке, который был получен при использовании первого и второго подходов. Конкретные результаты были более чем приемлемыми.

Цены бумаг изменяются как во время торгов, так и от одной торговой сессии к другой. Проводя удачно операции купли и продажи облигаций, инвестор может заметно увеличить свой доход по сравнению с пассивной тактикой ожидания их погашения.

Конкретный алгоритм, который был использован при управлении портфелем инвестора на вторичном рынке ГКО, позволил добиться доходности, превышающей средние показатели рынка. Алгоритм использовал прогноз изменения цен бумаг одних выпусков относительно других в некоторый, последующий моменту принятия решения период времени. Данный прогноз строился на основе информации об изменении цен облигаций в период, предшествующий принятию решения. Алгоритм рассчитан на такое управление, при котором решения об операциях купли-продажи принимаются раз в сессию. Хотя тот же алгоритм может быть использован и для более частых операций, надо иметь в виду следующие обстоятельства.

Поведение цен внутри сессии существенно отличается от их поведения от сессии к сессии, что не может не сказаться на эффективности алгоритма, верифицированного по динамике цен закрытия. (Цена закрытия данной облигации – это цена последней сделки совершенной с ней в течение сессии.) Масштаб изменения цен внутри сессии, вообще говоря, меньше, чем от сессии к сессии. В то же время операции купли-продажи требуют определенных издержек. Эти издержки складываются из комиссии биржи, комиссии дилера, а также возможной разницы между ценой текущей сделки в момент принятия решения участником рынка и той ценой, по которой он сможет совершить свою сделку. Данная разница возникает по причине некоторой временной задержки в исполнении трейдером заявок инвесторов и из-за спреда между ценой спроса и ценой предложения. Хотя издержки не очень велики (обычно, 0.05% – 0.2% от объема операции), при слишком частых трансформациях портфеля они способны превысить весь положительный эффект этих трансформаций.

Литература

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
2. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
4. Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. 7 March. P. 77 – 91.
5. Карлин С. Математические модели и методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.
6. Первозванский А.А., Первозванская Т.Ю. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.
7. Касимов Ю.Ф. Основы теории оптимального портфеля ценных бумаг. М: Филинъ, 1998.
8. Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг: Курс лекций. М.: Финансы и статистика, 1998.

9. Шведов А.С. Теория эффективных портфелей ценных бумаг: Пособие для студентов, изучающих портфельную теорию и теорию финансовых деривативов. М.: ГУ ВШЭ, 1999.

10. Маршалл Дж.Ф., Бансал В.К. Финансовая инженерия. Полное руководство по финансовым нововведениям. М.: Инфра-М, 1998.

11. Tobin J. The Theory of Portfolio Selection // Interest Rates / Hahn F., Breechling F. eds., London: Macmillan, 1965.

12. Агасандян Г.А. Элементы многопериодной портфельной модели. М.: ВЦ РАН, 1997.

13. Markowitz H., Todd P., Ganlin Xu., Yamane Y. Fast Computation of Mean – Variance Efficient Sets Using Historical Covariances // Journal of Financial Engineering. 1992. Vol. 1, N2, September. P. 117 – 132.

14. Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998.

15. Ziemba W.T., Mulvey J.M. Asset and liabilities management systems for long-term investors: discussion of the issues // Worldwide Asset and Liability Modeling. Cambridge: University Press, 1998. P. 3 – 38.

16. Consigli G. and Dempster M.A.H. The CALM Stochastic Programming Model for Dynamic Asset-Liability Management // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 464 – 500.

17. Гасанов И.И. Ерешко А.Ф. Об одном подходе к управлению портфелем Государственных Краткосрочных Облигаций. М.: ВЦ РАН, 1997.

18. Carino D.R., et al. MTB pension asset/liability management model // Mimeo-graphed notes. Frank Russell Company, Tacoma, Washington. 1995.

19. Hensel C.R., Don Ezra D., Ilkiw J.H. The Importance of the Asset allocation decision // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 41 – 52.

20. Chopra V.K., Ziemba W.T. The Effect of Errors in Means, Variance and Covariances On Optimal Portfolio Choice // Worldwide Asset

and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 53 – 61.

21. Hensel C.R., Turner A.L. The Making Superior Asset Allocation Decisions: a practitioner's guide // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 62 – 83.

22. Grinold R.C., Kelly K.E., Attribution of Performance and Holdings // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 87 – 113.

23. Mulvey J.M., Armstrong J., Rothberg E.T. Total integrative risk management // Risk Special Supplement. 1995. June. P. 28 – 30.

24. Pyle D. The US Savings and Loan crisis // Finance / Jarrow R.A, Maksimovich V., ZiembaW.T. eds. North Holland, 1995. P. 1105 – 1125.

25. Shaw J., Thorp E.O., Ziemba W.T. Risk arbitrage in the Nikkei put warrant market of 1989 – 90 // Applied Mathematical Finance. 1995. N2. P. 243 – 271.

26. Stone D. and Ziemba W.T. Land and stock prices in Japan // Journal of Economic Perspectives. 1993. N7. P. 149 – 165.

27. Berger A.L., Mulvey J.M., Rush R. Target-matching in financial scenario generation // Princeton University Report SOR – 97 – 15. Princeton University, 1997.

28. Fan Y., Murray S., Turner A. A retail level stochastic programming asset-liability management model for Italian investors // Report Frank Russell Company. 1997.

29. Merton R.C. Optimal investment strstegies for university endowment funds // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 371 – 396.

30. Correnti S., Nealon P., Sonlin S. Decomposing risk enhancing ALM and business decision making for insurance companies // Transactions of the 6th AFIR International Colloquium. 1996 P. 443 – 472.

31. Grinold R.C. Time horizons in energy planning models // Energy Policy Modeling: United States and Canadian Experiences / Ziemba W.T., Schwartz S.L. eds. Boston Martinus Nijhoff, 1980. Vol. II. P. 216 – 237.

32. Grinold R.C. Model building techniques for the correction of end effects in multistage convex programs // Operations Research. 1983. N31. P. 407 – 431.
33. Carino D.R., Myers D.H., Ziemba W.T. Concepts, technical issues and uses of the Russell – Yasuda Kasai financial planning model // Report, Frank Russell Company, January, forthcoming Operations Research. 1998
34. Carino D.R., Turner A.L. Multiperiod Asset Allocation With Derivative Assets // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 182 – 204.
35. Mulvey J.M. It always pays to look ahead // Balance Sheet. 1996. N4. P. 23 – 27.
36. Mulvey J.M. Generating scenarios for the Towers Perrin investment system // Interfaces. 1996. N26. P. 1 – 15.
37. Mulvey J.M., Thorlacius A.E. The Towers Perrin Global capital Market Scenario Generation System // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 286 – 312.
38. Rockafellar R.T., Wets R.J. – B. Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty // Mathematics of Operations Research. 1991. N16. P. 119 – 147.
39. Beckers S., Connor G., Curds R. National versus global influences on equity returns // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 114 – 128.
40. Chaumeton L., Connor G., Curds R. A global stock and bond model // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 129 – 145.
41. Connor G., Korajczyk R.A. The arbitrage pricing theory and multi-factor models of asset returns // Finance / Jarrow R.A., Maksimovich V., Ziemba W.T. eds. North Holland, 1995. P. 87 – 144.
42. Kelly J. A new interpretation of information rate // Bell System Technology Journal. 1956. N35. P. 917 – 926.
43. Grauer R.R., Hakansson N. On timing the market: the empirical probability assessment approach with an inflation adapter // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 149 – 181.

44. Merton R.C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case // Review of Economics and Statistics. 1969. N3. P. 373 – 413.
45. Merton R.C. Continuous-Time Finance. Blackwell Publishers, 1990.
46. Samuelson P. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // Review of Economics and Statistics. 1969. August. P. 239 – 246.
47. Brennan M.J., Schwartz E.S., Lagnado R. Strategic asset allocation // Journal of Economic Dynamics and Control. 1998.
48. Brennan M.J., Schwartz E.S. The use of Treasury bill futures in strategic asset allocation programs // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 205 – 228.
49. Kallberg J.G., White R.W., Ziemba W.T. Short term financial planning under uncertainty // Management Science. 1982. N28. P. 670 – 682.
50. Kusy M.I., Ziemba W.T. A bank asset and liability management model // Operations Research. 1986. N34. P. 356 – 376.
51. Carino D.R., Ziemba W.T. Formulation of the Russell – Yasuda Kasai financial planning // Report, Frank Russell Company, January, forthcoming Operations Research. 1998.
52. Carino D.R., Myers D.H., Ziemba W.T. Concepts, technical issues and uses of the Russell – Yasuda Kasai financial planning model // Report, Frank Russell Company, January, forthcoming Operations Research. 1998.
53. Frauendorfer K., Schurle M. Barycentric approximation of stochastic interest rate processes // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 231 – 262.
54. Rudolf M., Zimmerman H. An algorithm for international portfolio selection and optimal currency hedging // Worldwide Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 315 – 340.
55. Sweeney J.C., Sonlin S.M., Correnti S., Williams A.P. Optimal insurance asset allocation in a multi-currency environment // Worldwide

Asset and Liability Modeling / Ziemba W.T., Mulvey J.M. eds. Cambridge: University Press, 1998. P. 341 – 368.

56. Gardner G.W., Stone D. Estimating currency hedge ratios for international portfolios // Financial Analysts Journal 1995. November/December. P. 58 – 64.

57. Sorensen E., Mezrich E., Thadani D. Currency hedging through portfolio optimization // Journal of Portfolio Management. 1993. Spring P. 78 – 85.

58. Longin P.M. The asymptotic distribution of extreme stock market returns // Journal of Business. 1996. N69. P. 383 – 408.

59. Jackwerth J.C. and Rubinstein M. Recovering probability distributions from option prices // Journal of Finance 1997. N51. P. 1611 – 1631.

60. Mulvey J.M., Rush R., Mitchell J.E., Willemain T.R. Stratified filtered sampling in stochastic optimization // Princeton University Report SOR – 97 – 7. To appear in European Journal of Operations Research. Princeton University, 1997.

61. Greenspan A. Financial innovations and the supervision of financial institutions // Journal of Financial Engineering. 1995. N4. P. 299 – 306.

62. Солянкин А.А. Компьютеризация финансового анализа и прогнозирования в банке. М.: Финстатинформ, 1998.

63. Киселев В.В. Управление коммерческим банком в переходный период. М.: Издательская корпорация “Логос”, 1997.

64. Лаптырев Д.А., Батенко И.Г., Буковский А.В., Митрофанов В.И. Планирование финансовой деятельности банка: необходимость, возможность, эффективность. М.: АСА, 1995.

65. Екушов А.И. Модели учета и анализа в коммерческом банке. Калининград: Янтарный сказ, 1997.

66. Екушов А.И. Модель пассивной эволюции в задачах анализа и управления // Банковские технологии. 1995. №8.

67. Богарева Е., Эпов А. Моделирование пассивной эволюции в управлении финансами // Банковские технологии. 1997. № 1.

68. Флеров Ю.А., Вышинский Л.Л., Гринев И.Л., Катунин В.П., Широков Н.И. Банковские информационные технологии. ч. 1, 2. М.: ВЦ РАН, 1999.

69. Кульба В.В., Кузина В.В., Косяченко С.А., Шелков А.Б. Фундаментальный анализ в коммерческом банке. М.: ИПУ РАН, 1999.

70. Ованесов А., Четвериков В. Поток платежей // Рынок ценных бумаг. 1996. № 17, 19, 21.

71. Вестник Федеральной Комиссии по рынку ценных бумаг, www.financy.ru, www.finrisk.ru.

72. Bradley S.P., Crane D.B. A dynamic model for bond portfolio management // Management Science. 1972. N19. P. 139 – 151.

73. Lane M., Hutchinson P. A model for managing a certificate of deposit portfolio under uncertainty // Stochastic Programming / Dempster M.A.H. ed. Academic Press, 1980. P. 473 – 493.

74. Carino D.R., Kent T., Myers D.H., Stacy C., Sylvanus M., Turner A.L., Watan-abe K., Ziemba W.T. The Russell – Yasuda Kasai model: An asset/liability model for a Japanese insurance company using multi-stage stochastic programming // Interfaces. 1994. N24. P. 29 – 49.

75. Dempster M.A.H., Ireland A. Object oriented model integration in a financial decision support system // Decision Support Systems. 1991. N7. P. 329 – 340.

76. Mulvey J.M., Vladimirou H. Stochastic network optimization models for investment planning // Annals of Operations Research. 1989. N20. P. 187 – 217.

77. Zenios S. Asset-liability management under uncertainty: The case of mortgage-backed securities // Research Report, Hermes Lab for Financial Modeling and Simulation. The Wharton School, University of Pennsylvania, 1992.

78. Stochastic Programming / Dempster M.A.H. ed. Academic Press, 1980.

79. Ermoliev Yu., Wets R.J.B. eds. Numerical Techniques for Stochastic Optimization. Springer – Verlag. 1988.

80. Dupacova J. Stochastic Programming Models in Banking // Working Paper, International Institute for Applied Systems Analysis. Laxenburg, Austria, 1991.

81. Dupacova J. Multistage stochastic programs: The state of the art and selected bibliography // Kybernetika. 1995. N31. P. 151 – 174.

82. Birge J.R. Decomposition and partitioning methods for multistage stochastic linear programs // Operations Research. 1985. N33. P. 989 – 1007.

83. Dempster M.A.H., Thompson R.T. Parallelization and aggregation of nested Benders decomposition // Proceedings APMOD95 Conference, Brunei University. To appear in Annals of Operations Research. 1996.

84. Dempster M.A.H., Thompson R.T. EVPI-based importance sampling solution procedures for multistage stochastic linear programmes on parallel MIMD architectures. Proceedings of the POC96 Conference, Versailles. To appear in Annals of Operations Research. 1996.

85. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

86. Гасанов И.И., Ерешко А.Ф. Об одном подходе к управлению портфелем Государственных Краткосрочных Облигаций // Труды конференции. “Теория активных Систем”. Москва, ИПУ РАН, 1999. С. 207 – 208.

87. Agasandian G.A., Gasanov I.I., Ereshko F.I., Ereshko A.F., Stolyarova E.M. The Models of Operations Research in Financial Engineering // World Conference on Computational Intelligence in Financial Engineering. N.Y., 2000. www.iafe.org.

88. Агасандян Г.А., Гасанов И.И., Ерешко Ф.И., Ерешко А.Ф., Охрименко В.В., Столярова Е.М., Столяров Л.Н. Модели принятия решений в финансовой инженерии // Тезисы докладов научной сессии “Проблемы прикладной математики и информатики – 2000”, 6 – 7 дек. 2000 г. Москва, ВЦ РАН, 2000. С. 21 – 22.

89. Гасанов И.И., Ерешко А.Ф. Оптимальное управление портфелем дисконтных облигаций // Рынок ценных бумаг. 2001. 14(197). С. 58 – 61.

90. Ерешко А.Ф. Локально-оптимальные стратегии в задаче управления портфелем ценных бумаг // Тезисы доклада 3–ей Московской международной конференции по исследованию операций, 4 – 6 апр. 2001 г. Москва, ВЦ РАН, 2001. С. 29 –30.

91. Ерешко А.Ф. Эффекты нелинейности при формировании портфеля ценных бумаг и декомпозиция финансовых инструментов // Труды международной научно-практической конференции “Теория активных Систем”. Москва, ИПУ РАН, 2001. С. 28.

92. Ereshko A.F. Computational Method of the Fuzzy Goals at Management of a Portfolio // World Conference on Computational Intelligence 2002 (IEEE International Conference on Fuzzy Systems). Honolulu, 2002. 12 p. www.wcci2002.org.

93. Агасандян Г.А. Финансовая инженерия и критерий допустимых потерь VaR. М.: ВЦ РАН, 2001.

94. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.